Formes quadratiques

Cours et applications

Richard Gomez

30 décembre 2010

Table des matières

Prologue

Dans tous les chapitres qui suivent $\mathbb{K}$ désigne un corps de caractéristique différente de deux, ce qui signifie que dans ce corps $1 + 1 \neq 0$. Moralement cela revient à dire que dans $\mathbb{K}$ on peut diviser par deux.

On s'intéresse ici aux fonctions de $\mathbb{K}^n$ définies par des formules du type

$$q(x_1, ..., x_n) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2 + \mu_{12} x_1 x_2 + ... + \mu_{n-1,n} x_{n-1} x_n$$

où les λ_i et les μ_{ij} sont des scalaires fixés. Ce sont les fonctions définies par les polynomes homogènes de degré deux. On les appelle formes quadratiques. Elles apparaissent par exemple dans l'étude des courbes algébriques de degré deux. Dans $\mathbb{R}^2$, une courbe de degré deux est une partie $\mathcal{C}$ définie par une équation

$$a x^2 + b y^2 + c x y + d x + e y + f = 0$$

où $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Le membre de gauche de cette équation est constitué d'une forme quadratique $(a x^2 + b y^2 + c x y)$, d'une forme linéaire $(d x + e y)$ et d'une constante (f). L'étude des formes quadratiques permet de montrer assez facilement que $\mathcal{C}$ est une conique (éventuellement dégénérée).

L'idée cruciale dans l'étude d'une forme quadratique q est de remarquer que celle-ci est la spécialisation d'une fonction liée à la structure linéaire de $\mathbb{K}^n$. Si par exemple q est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$q(x) = q(x_1, x_2) = x_1^2 - 3 x_1 x_2$$

on introduit la fonction $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$b(x, y) = x_1 y_1 - \frac{3}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

et on remarque que pour tout x, on a

$$q(x) = b(x, x)$$

L'intérêt de b réside dans la linéarité des applications $b(x, \bullet)$ et $b(\bullet, x)$: on dit que b est bilinéaire. Cette remarque facilite l'étude de q.

Avertissement 1. Ce document est le premier jet d'un projet sur les formes quadratiques. Il sera complété ultérieurement. Nous prévoyons par exemple d'ajouter une série d'exercices corrigés.

Chapitre 1

Rappels sur l'espace dual

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. On note E^* le dual de E. On définit l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} \varphi \ : \ E & \longrightarrow & E^* \\ e_i & \longmapsto & e_i^* \end{array}$$

où e_i^* est la forme linéaire qui associe 1 à e_i et 0 aux autres e_k. Il est clair que $e_i^*(u)$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de u dans la base (e_i). On montre facilement que φ est un isomorphisme. Les espaces E et E^* sont donc isomorphes bien qu'il n'y ait pas d'isomorphisme canonique entre les deux (pour définir φ il a fallu choisir une base sur E). En revanche on a la

Proposition 1.1. *Les espaces E et E^{**} sont canoniquement isomorphes.*

On rappelle que E^{**} désigne le dual de E^* ; on l'appelle bidual de E.

Démonstration. On définit

$$\psi \ : \ E \longrightarrow E^{**}$$

par

$$\begin{array}{rcl} \psi(x) \ : \ E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \omega(x) \end{array}$$

C'est clairement une application linéaire et bijective. □

Nous avons une application bilinéaire naturelle

$$\begin{array}{rcl} \langle \bullet, \bullet \rangle \ : \ E \times E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (a, \omega) & \longmapsto & \langle a, \omega \rangle = \omega(a) \end{array}$$

appelée crochet de dualité. Il symbolise le fait que ω s'applique à a autant que a s'applique à ω. Les deux espaces ainsi liés étant isomorphes, on ne saurait, « vu de l'extérieur » dire de a et de ω qui est le vecteur et qui est la forme linéaire ! C'est ce qui explique que les éléments de E^* soient appelés les covecteurs dans la plupart des manuels. Notons au passage que ce crochet possède les mêmes propriétés qu'un produit scalaire, hormis la symétrie. D'ailleurs, si on identifie E^* à E modulo φ, le crochet n'est autre que le produit scalaire associé à la base (e_i).

Proposition 1.2. *Chaque base ε de E^* détermine une base e de E pour laquelle on a $e^* = \varepsilon$.*

Démonstration. La base ε définit par dualité une base ε^* dans E^{**}, mais ce dernier étant canoniquement isomorphe à E, nous savons que ε^* correspond à une base e de E. On vérifie facilement que $e^* = \varepsilon$. □

On dit alors que e est la base antéduale de ε. Cette proposition n'a rien d'étonnant : se donner une base dans E^* équivaut à se donner un système de coordonnées linéaires sur E. Concrètement, si (ε_i) est une base de E^*, on lui associe la base pour laquelle les coordonnées de chaque vecteur u est l'uplet $(\varepsilon_i(u))$.

Exemple 1.3. Prenons $E=\mathbb{R}^2=\{(x,y);x,y\in\mathbb{R}\}$. On peut voir alors le symbole x comme la forme linéaire qui à chaque (a,b) associe a. Même chose avec y, ainsi qu'avec toute combinaison linéaire de x et y. Une fois adoptée cette notation certes abusive, mais habituelle en géométrie analytique, on montre sans difficulté que $(x+y, x-y)$ est une base de E^*. Cherchons sa base antéduale. On note (e_1,e_2) la base canonique de E, et (e_1',e_2') la base recherchée. On notera que par définition $x+y$ est $e_1^*+e_2^*$ et $x-y$ est $e_1^*-e_2^*$. Pour tout $u\in E$, on a $u=xe_1+ye_2$ et

$$\begin{aligned} u &= (x+y)e_1'+(x-y)e_2' \\ &= x(e_1'+e_2')+y(e_1'-e_2') \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} e_1=e_1'+e_2' \\ e_2=e_1'-e_2' \end{cases}$$

qui se résoud en

$$\begin{cases} e_1'=\frac{e_1+e_2}{2} \\ e_2'=\frac{e_1-e_2}{2} \end{cases}$$

Nous avons bien trouvé la base antéduale de $(x+y,x-y)$.

Notons que nous venons de répondre à la question suivante : trouver la base de E correspondant au changement de coordonnées

$$\begin{cases} x'=x+y \\ y'=x-y \end{cases}$$

On aurait pu le faire en écrivant la matrice de passage de e' vers e.

Lemme 1.4. *Soient E un espace vectoriel de dimension n, (e_i) une base de E et ω une forme linéaire sur E. Alors les coordonnées de ω dans la base duale (e_i^*) sont les $(\omega(e_i))$, autrement dit*

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}\omega(e_i)e_i^*$$

Démonstration. Soit $a\in E$. Alors $a=\sum_{i=1}^n e_i^*(a)e_i$ et par linéarité,

$$\begin{aligned} \omega(a) &= \sum_{i=1}^{n} e_i^*(a)\omega(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\omega(e_i)e_i^*(a) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\omega(e_i)e_i^*\right)(a) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout a, nous avons bien l'égalité énoncée. □

Remarque 1.5. Tout ceci illustre bien la « dualité » entre E et E^*. On notera la symétrie entre les formules

$$a=\sum_{i=1}^{n}\left\langle a,e_i^*\right\rangle e_i$$

et

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}\left\langle e_i,\omega\right\rangle e_i^*$$

Remarque 1.6. La matrice de ω en tant qu'application linéaire (exprimée dans la base e) et la matrice de ω en tant que vecteur de E^* (exprimée dans la base e^*) ont exactement les mêmes coefficients :

$$\omega(e_i)$$

la différence étant que la première est une ligne tandis que la deuxième est une colonne. Autrement dit

$$\operatorname*{mat}_{e} \omega = \left(\operatorname*{mat}_{e^*} \omega \right)^t$$

Exercice 1.1. Ecrire grâce à cette remarque les formules de changement de base dans E^* (on exprimera le changement relatif à deux bases de E^* en fonction du changement relatifs aux bases antéduales dans E).

Au chapitre ? nous aurons besoin de la notion d'annulateur :

Définition 1.7. *Soient E un espace vectoriel et A une partie de E. L'annulateur de A est l'ensemble A^0 des covecteurs qui s'annulent en chaque élément de A :*

$$A^0 = \{\omega \in E^* ; \forall a \in A, \omega(a) = 0\}$$

On montre facilement que A^0 est un sous-espace vectoriel de E^* et on obtient facilement la

Proposition 1.8. *Si E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E on a*

$$\dim E = \dim F + \dim F^0$$

Le crochet de dualité nous montre à quoi ressemble l'annulateur d'une partie Δ de E^*. Par définition, Δ^0 est l'ensemble des éléments de E^{**} qui s'annulent pour chaque forme appartenant à Δ :

$$\Delta^0 = \{\zeta \in E^{**} ; \forall \delta \in \Delta, \zeta(\delta) = 0\}$$

or chaque ζ s'identifie canoniquement à un élément x de E : plus précisément,

$$\zeta = \langle x, \bullet \rangle$$

(ζ est l'évaluation en x). Ainsi, si $\delta \in E^*$, $\zeta(\delta) = \left\langle x, \delta \right\rangle = \delta(x)$ et donc Δ^0 s'identifie canoniquement au sous-espace

$$\{x \in E ; \forall \delta \in \Delta, \delta(x) = 0\}$$

de E. Nous résumerons ceci par

$$\{\zeta \in E^{**} ; \forall \delta \in \Delta, \langle \delta, \zeta \rangle_2 = 0\} \rightleftharpoons \{x \in E ; \forall \delta \in \Delta, \left\langle x, \delta \right\rangle_1 = 0\}$$

où $\langle \bullet, \bullet \rangle_1$ est le crochet de dualité reliant E et E^* et $\langle \bullet, \bullet \rangle_2$ le crochet reliant E^* et E^{**}.

Chapitre 2
Premières notions

2.1 Formes bilinéaires symétriques

Définition 2.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\varphi: E \times E \to \mathbb{K}$.*

1. *On dit que φ est une forme bilinéaire si pour tout $x \in E$, les applications partielles et $\varphi(x, \bullet)$ et $\varphi(\bullet, x)$ sont linéaires.*
2. *On dit que φ est symétrique si pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.*

Le but de ce livre est d'étudier les formes bilinéaires symétriques. Voici quelques exemples fondamentaux.

Exemple 2.2. La multiplication des nombres réels,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}$. C'est d'ailleurs pour généraliser la multiplication que l'on a introduit la définition 2.1.

Exemple 2.3. Produit tensoriel de formes linéaires. Si $\alpha, \beta \in E^*$, on définit le produit tensoriel $\alpha \otimes \beta$ de α par β par

$$\alpha \otimes \beta: (a, b) \longmapsto \alpha(a)\, \beta(b)$$

C'est une forme bilinéaire. On notera que

$$\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha: (a, b) \longmapsto \alpha(a)\, \beta(b) + \alpha(b)\, \beta(a)$$

est bilinéaire symétrique.

Exemple 2.4. Le produit scalaire (dans ce cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Tout produit scalaire sur espace vectoriel réel est une forme bilinéaire symétrique. La réciproque est fausse. Nous rencontrerons en effet des formes qui ne sont ni définies, ni positives.

Exemple 2.5. Exemple fondamental. Certains polynomes homogènes de degré deux, plus précisément les fonctions du type

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ ((x_i), (y_i)) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{(i,j)} \lambda_{ij} x_i y_j \end{array}$$

sont des formes bilinéaires. Si de plus $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ pour tout (i, j), alors la forme est symétrique.

Exemple 2.6. Avec la trace. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (M, N) & \longmapsto & \mathrm{Tr}(MN) \end{array}$$

est bilinéaire symétrique.

2.2 Structure sur l'espace des formes bilinéaires

Notation 2.7. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note $T_2(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E et $T_2^{\mathrm{sym}}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques.*

La lettre T vient du mot tenseur : les formes bilinéaires sont des tenseurs particuliers. On rappelle que l'ensemble $\mathbb{K}^{E\times E}$ des applications de $E\times E$ vers $\mathbb{K}$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On montre facilement la

Proposition 2.8. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors*

1. *L'ensemble $T_2(E)$ des formes bilinéaires sur E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{E\times E}$.*
2. *L'ensemble $T_2^{\mathrm{sym}}(E)$ des formes bilinéaires symétriques sur E est un sous-espace vectoriel de $T_2(E)$.*

Le sous-espace T_2^{sym} possède un supplémentaire dans T_2 que le lecteur connaît sûrement : le sous-espace des formes bilinéaires alternées (on dit aussi anti-symétriques).

Définition 2.9. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et φ une forme bilinéaire sur E. On dit que φ est alternée si pour tous x, $y\in E$, $\varphi(y,x)=-\varphi(x,y)$. On note $T_2^{\mathrm{alt}}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires alternées sur E.*

On montre facilement que $T_2^{\mathrm{alt}}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $T_2(E)$.

Proposition 2.10. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors l'espace des formes bilinéaires sur E est la somme directe du sous-espace des formes symétriques et du sous-espace des formes alternées :*

$$T_2(E)=T_2^{\mathrm{sym}}(E)\oplus T_2^{\mathrm{alt}}(E)$$

Démonstration. Il est clair que l'intersection de ces deux sous-espaces est $\{0\}$. Soit $\varphi\in T_2(E)$. On définit alors $\psi: E\times E\to\mathbb{K}$ par

$$\psi(x,y)=\varphi(y,x)$$

C'est une forme bilinéaire. On pose

$$\begin{cases}\varphi_{\mathrm{sym}}=\frac{\varphi+\psi}{2}\\ \varphi_{\mathrm{alt}}=\frac{\varphi-\psi}{2}\end{cases}$$

On a bien

$$\varphi=\varphi_{\mathrm{sym}}+\varphi_{\mathrm{alt}}$$

avec

$$\begin{cases}\varphi_{\mathrm{sym}}\in T_2^{\mathrm{sym}}(E)\\ \varphi_{\mathrm{alt}}\in T_2^{\mathrm{alt}}(E)\end{cases}$$

□

Remarque 2.11. Il existe d'autres notations pour les espaces T^{sym} et T^{alt}. On note par exemple $S_2(E)$ l'espace des formes bilinéaires symétriques sur E et $\Lambda_2(E)$ l'espace des formes bilinéaires alternées sur E. Avec ces notations la somme directe précèdente s'écrit

$$T_2(E)=S_2(E)\oplus\Lambda_2(E)$$

Remarque 2.12. Si E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 2 on a

$$T_2^{\mathrm{sym}}(E)=T_2^{\mathrm{alt}}(E)=T_2(E)$$

2.3 Formes quadratiques

Toute forme bilinéaire φ sur E définit une fonction q sur E par

$$q(x)=\varphi(x,x)$$

Une telle fonction est appelée forme quadratique sur E. Il se trouve qu'il est inutile de faire appel à toutes les formes bilinéaires pour obtenir toutes les formes quadratiques sur E. En effet,

- premièrement, si ψ est alternée alors pour tout $x\in E$, $\psi(x,x)=0$,

– et deuxièmement, $\varphi(x,x)=\varphi_{\mathrm{sym}}(x,x)+\varphi_{\mathrm{alt}}(x,x)=\varphi_{\mathrm{sym}}(x,x)$.

Ainsi, φ définit la même forme quadratique que la forme symétrique φ_{sym} : deux formes bilinéaires qui diffèrent d'une forme alternée définissent la même forme quadratique. Nous adopterons la

Définition 2.13. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $q: E\to\mathbb{K}$. On dit que q est une forme quadratique sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur E telle que pour tout $a\in E$,*

$$q(a)=\varphi(a,a) \tag{2.1}$$

On dit que q est la forme quadratique associée à φ et φ la forme polaire de q. On note $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E.

Nous avons une surjection naturelle

$$T_2^{\mathrm{sym}}(E)\longrightarrow\mathcal{Q}(E) \tag{2.2}$$

et aussi

$$T_2(E)\longrightarrow\mathcal{Q}(E)$$

Exemple 2.14. La fonction

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^2\end{array}$$

est la forme quadratique sur $\mathbb{R}$ associée à la forme de l'exemple 2.2. C'est l'archétype des formes quadratiques et on lui doit la terminologie choisie.

Exemple 2.15. La fonction

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2\end{array}$$

est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ associée à la forme

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ \left(\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}\right) & \longmapsto & x_1\,x_2+y_1\,y_2\end{array}$$

Exemple 2.16. La forme quadratique associée à la forme bilinéaire de l'exemple 2.5, lorsque celle-ci est symétrique est

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ (x_i) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{(i,j)}\lambda_{ij}\,x_i\,x_j\end{array}$$

On notera que si $i\neq j$, le monome $x_i\,x_j$ apparaît deux fois dans cette somme, avec le même coefficient puisque $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$. On peut donc nettoyer un peu cette formule :

$$q(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}\lambda_{ii}\,x_i^2+\sum_{1<i<j}2\lambda_{ij}\,x_i\,x_j$$

Exemple 2.17. La forme quadratique associée à la forme de l'exemple 2.6 est

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(M^2)\end{array}$$

Exemple 2.18. La fonction déterminant définie sur les matrices d'ordre 2 :

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ A & \longmapsto & \det A\end{array}$$

(évidemment, si $n\neq 2$, l'application déterminant définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas une forme quadratique !)

2.4 Identités remarquables

Commençons par une identité qui saute aux yeux, et qui explique (elle aussi) le mot « quadratique » :

Proposition 2.19. *Soit E un espace vectoriel, q une forme quadratique sur E. Alors pour tout scalaire λ et $a \in E$ on a*

$$q(\lambda a) = \lambda^2 q(a)$$

Continuons avec des égalités qui rappellent les fameuses identités remarquables du collège :

Proposition 2.20. *Identités remarquables. Soit E un espace vectoriel, φ une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée. Alors, pour tout $a, b \in E$,*

1. $q(a+b) = q(a) + 2\varphi(a,b) + q(b)$
2. $q(a-b) = q(a) - 2\varphi(a,b) + q(b)$
3. $\varphi(a+b, a-b) = q(a) - q(b)$

Démonstration. Il suffit pour chaque égalité de remplacer les $q(u)$ apparaissant dans le membre de gauche par $\varphi(u,u)$, est de « développer » grâce à la bilinéarité. □

En additionnant les identités 1 et 2 on obtient une identité connue dans les espaces préhilbertien :

Corollaire 2.21. *Identité du parallélogramme. Soit E un espace vectoriel, φ une forme bilinéaire symétrique et q la forme quadratique associée. Alors pour tout $a, b \in E$*

$$q(a+b) + q(a-b) = 2q(a) + 2q(b)$$

Quelques manipulations élémentaires donne le

Corollaire 2.22. *Identités de polarisation. Soit E un espace vectoriel, φ une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée. Alors pour tout $a, b \in E$*

1. $\varphi(a,b) = \frac{q(a+b) - q(a) - q(b)}{2}$
2. $\varphi(a,b) = \frac{q(a) + q(b) - q(a-b)}{2}$
3. $\varphi(a,b) = \frac{q(a+b) - q(a-b)}{4}$

On insiste sur le fait que ces relations n'ont pas de sens si le corps des scalaires est de caractéristique deux.

Remarque 2.23. Ces identités montrent comment transformer un « produit » en somme algébrique de « carrés ». Elle seront utiles dans $\mathbb{K}$ pour la méthode de Gauss.

Remarque 2.24. On peut se demander combien de formes bilinéaires symétriques différentes définissent une même forme quadratique. Les identités de polarisation répondent à cette question : une et une seule ! Ainsi les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques sont en correspondance biunivoque.

2.5 Structure sur l'espace des formes quadratiques

On rappelle que l'ensemble $\mathbb{K}^E$ des applications de E vers $\mathbb{K}$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 2.25. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel réel. Alors*

1. *L'ensemble $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^E$.*
2. *Les espaces $T_2^{\mathrm{sym}}(E)$ et $\mathcal{Q}(E)$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. L'item 1 ne pose aucun problème. L'isomorphisme canonique évoqué à l'item 2 n'est autre que l'application naturelle (2.2) : $T_2^{\mathrm{sym}}(E) \to \mathcal{Q}(E)$. □

Chapitre 3
Matrice d'une forme quadratique

Soient E un espace vectoriel de dimension n, a et b des éléments de E, (e_i) une base de E et φ une forme bilinéaire sur E. Notre but ici est d'exprimer $\varphi(a,\ b)$ à l'aide d'une matrice, à la manière de ce qu'on fait avec les applications linéaires. La bilinéarité de φ implique que le calcul de $\varphi(a,b)$ se ramène au calcul des $\varphi(e_i,e_j)$:

$$\begin{aligned}\varphi(a,b) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{i=1}^{n} b_i e_i\right)\\ &= \sum_{(i,j)} a_i b_j \varphi(e_i,e_j)\\ &= \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} (\varphi(e_i,e_j)) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.1}$$

Ceci nous inspire la

Définition 3.1. *Soient E un espace vectoriel de dimension n, (e_i) une base de E et φ une forme bilinéaire sur E. La matrice de φ dans la base (e_i) est la matrice $n\times n$ dont le coefficient (i,j) est $\varphi(e_i,e_j)$. On note $\mathrm{mat}_e\,\varphi$ cette matrice :*

$$\underset{e}{\mathrm{mat}}\,\varphi = (\varphi(e_i,e_j))$$

Nous avons établi la

Proposition 3.2. *Soient E un espace vectoriel réel de dimension n, (e_i) une base de E, φ une forme bilinéaire sur E et a et b des éléments de E. Alors*

$$\varphi(a,b) = {}^t\left(\underset{e}{\mathrm{mat}}\,a\right)\left(\underset{e}{\mathrm{mat}}\,\varphi\right)\left(\underset{e}{\mathrm{mat}}\,b\right)$$

On notera que le produit de ces trois matrices est en réalité une matrice 1×1 que nous identifions naturellement à un scalaire, ce qui justifie l'égalité. Cette égalité s'écrit traditionnellement

$$\varphi(a,b) = {}^tAMB$$

Nous avons clairement la

Proposition 3.3. *Soient E un espace vectoriel de dimension n, (e_i) une base de E, φ une forme bilinéaire sur E. La forme φ est symétrique si et seulement si sa matrice dans (e_i) est symétrique.*

Si q est la forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique φ, on dit que $\mathrm{mat}_e\,\varphi$ est la matrice de q dans la base (e_i). On a

$$q(a) = {}^tAMA$$

On montre facilement la

Proposition 3.4. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et (e_i) une base de E.*

1. *L'application $T_2(E)\rightarrow\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui à chaque forme bilinéaire associe sa matrice dans (e_i) est un isomorphisme.*

2. De même, l'application $T_2^{\mathrm{sym}}(E) \to \mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ *est un isomorphisme.*

Que devient la matrice de φ lorsque l'on change de base ? Si (u_i) est une nouvelle base alors

$$\begin{aligned}
\varphi(a,b) &= {}^t\Big(\operatorname*{mat}_e a\Big)\Big(\operatorname*{mat}_e \varphi\Big)\Big(\operatorname*{mat}_e b\Big) \\
&= {}^t\Big(\operatorname*{mat}_e u \operatorname*{mat}_u a\Big)\Big(\operatorname*{mat}_e \varphi\Big)\Big(\operatorname*{mat}_e u \operatorname*{mat}_u b\Big) \\
&= {}^t\Big(\operatorname*{mat}_u a\Big)\,{}^t\Big(\operatorname*{mat}_e u\Big)\Big(\operatorname*{mat}_e \varphi\Big)\Big(\operatorname*{mat}_e u\Big)\Big(\operatorname*{mat}_u b\Big)
\end{aligned}$$

Il semblerait donc que $(\mathrm{mat}_e\ u)(\mathrm{mat}_e\ \varphi)(\mathrm{mat}_e\ u)$ soit la nouvelle matrice. Notons X cette matrice et M la matrice de φ dans la base u. Pour prouver que $X = M$, plusieurs méthodes s'offrent à nous :

- De ${}^tAXB = {}^tAMB$, on déduit ${}^tA(X - M)B = 0$. Ceci étant vrai pour toutes les colonnes A et B, en en déduit que $X - M = 0$.
- Le calcul du coefficient (i,j) de X donne $\varphi(u_i, u_j)$, d'où le résultat.
- De l'égalité $\varphi(a,b) = {}^tAXB$ on déduit que pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\varphi(u_i,u_j) = {}^tC_i\,XC_j$ où C_k désigne la colonne nulle partout sauf à la ligne k où il y a 1. Il se trouve que ${}^tC_i\,XC_j$ est le coefficient (i,j) de X, d'où le résultat.

Nous venons de prouver la

Proposition 3.5. *Soient E un espace vectoriel de dimension n et φ une forme bilinéaire sur E. Soient (e_i) et (u_i) des bases de E. Alors*

$$\operatorname*{mat}_u \varphi = {}^t\Big(\operatorname*{mat}_e u\Big)\Big(\operatorname*{mat}_e \varphi\Big)\Big(\operatorname*{mat}_e u\Big)$$

Traditionnellement cette égalité s'écrit

$$M' = {}^tPMP$$

où P désigne la matrice de passage de e vers u. Ceci nous inspire la

Proposition 3.6. *Soient M, $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M et M' sont congrues s'il existe $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ tel que $M' = {}^tPMP$.*

La congruence des matrices est une relation d'équivalence. Classifier les matrices modulo la congruence revient à classifier les formes bilinéaires symétriques modulo changement de base. C'est un des objectifs de ce livre.

Remarque 3.7. L'égalité (3.1) donne la description analytique de toute forme bilinéaire. Elle prouve que toute forme bilinéaire sur $\mathbb{K}^n$ s'écrit comme à l'exemple 2.5. La réciproque est vraie également : toute fonction s'écrivant comme dans cet exemple est une forme bilinéaire. Dans $\mathbb{R}^3$ par exemple, les formes bilinéaires ressemblent à

$$\varphi(x,y) = 2x_1\,y_1 + x_1\,y_2 + x_1\,y_3 + 3x_2\,y_1 + 5x_2\,y_3 - x_3\,y_1$$

Les formes symétriques ressemblent plus particulièrement à

$$\varphi(x,y) = x_1\,y_1 + 18x_2\,y_2 - x_3\,y_3 + 5(x_1\,y_2 + x_2\,y_1) + 2(x_1\,y_3 + x_3\,y_1)$$

En posant $y = x$, $\mu_i = \lambda_{ii}$ et $\mu_{ij} = 2\lambda_{ij}$ dans l'expression de $\varphi(x,y)$, on constate que les formes quadratiques sur $\mathbb{K}^n$ s'écrivent

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\,x_i^2 + \sum_{i<j} \mu_{ij}\,x_i\,x_j \tag{3.2}$$

Les termes $\mu_i\,x_i^2$ sont appelés les carrés et les $\mu_{ij}\,x_i\,x_j$, les rectangles. Réciproquement, si q est définie par une telle formule, on construit une fonction φ en remplaçant chaque terme carré $\mu_i\,x_i^2$ par $\mu_i\,x_i\,y_i$, et chaque terme rectangle $\mu_{ij}\,x_i\,x_j$ par $\frac{\mu_{ij}}{2}(x_i\,y_j + x_j\,y_i)$. Cette fonction φ est clairement la forme polaire de q.

Chapitre 4
Premiers invariants

4.1 Discriminant

Nous savons que le déterminant de la matrice d'un endomorphisme est invariant par changement de base. C'est ce qui nous permet de définir le déterminant d'un endomorphisme. Les choses sont plus compliquées avec les formes bilinéaires. Voici ce que provoque un changement de base :

$$\begin{aligned}\left|\underset{u}{\text{mat}}\,\varphi\right| &= \left|{}^t\underset{e}{\text{mat}}\,u\right|\left|\underset{e}{\text{mat}}\,\varphi\right|\left|\underset{e}{\text{mat}}\,u\right| \\ &= \left|\underset{e}{\text{mat}}\,u\right|^2\left|\underset{e}{\text{mat}}\,\varphi\right|\end{aligned}$$

On remarque néanmoins que si le déterminant d'une matrice de φ est nul, alors le déterminant de toutes ses matrices seront nuls.

On remarque également qu'un changement de base multiplie le déterminant par un carré non nul. Supposons que le déterminant de φ dans la base e est non nul. Notons C l'ensemble des carrés non nuls de $\mathbb{K}$, c'est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{K}^*, \times)$. Le calcul précédent montre que l'image de ce déterminant dans le groupe quotient $\mathbb{K}^*/\boldsymbol{C}$ est invariant par changement de base.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le sous-groupe des carrés non nuls est $\mathbb{R}_+^*$ et on regardera le déterminant dans le groupe $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^*$. Ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ou encore à $(\{1, -1\}, \times)$.

Définition 4.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On note C l'ensemble des scalaires carrés non nuls :*

$$C = \{\lambda^2\,;\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}\}$$

c'est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{K}^*, \times)$. On se sert de C pour définir le groupe quotient $\mathbb{K}^*/C$. Soient φ une forme bilinéaire sur E et q la forme quadratique associée. Si le déterminant d'une matrice de φ est nul, on dit que le discriminant de φ est zéro. Si le déterminant d'une matrice M de φ n'est pas nul, on définit la discriminant de φ comme l'image de $\det M$ *dans le groupe $\mathbb{K}^*/C$. Dans tous les cas, on note $\Delta(\varphi)$ le discriminant de φ.*

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le discriminant vit dans le groupe $\mathbb{C}^*/\mathbb{C}^*$ qui est isomorphe à $\{1\}$ et n'a aucun intérêt ! A l'inverse, si le corps des scalaires est $\mathbb{R}$, le discriminant peut fournir des informations précieuses.

4.2 Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$ grâce au discriminant

Nous savons que toute forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ est du type

$$\varphi(x, y) = a x_1 y_1 + b(x_1 y_2 + x_2 y_1) + c x_2 y_2$$

Dans la base canonique la matrice de φ est

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Le discriminant est alors

$$\Delta = ac - b^2$$

à prendre modulo coefficient positif près. La forme quadratique associée à φ est

$$q(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

Nous allons voir que Δ intervient dans la résolution de

$$q(x) = 0$$

Résolvons cette équation en changeant légèrement les notations, c'est à dire en posant

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

(maintenant x et y sont des scalaires). Nous avons déjà résolu cette équation dans [2]. Pour trouver les solutions (x, y) telles que $y \neq 0$ on résoud l'équation d'inconnue $\frac{x}{y}$ ci-dessous

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2b\left(\frac{x}{y}\right) + c = 0 \tag{4.1}$$

dont le discriminant est $4b^2 - 4ac = -4\Delta$. Tout dépend donc du discriminant de la forme. Etudions chaque cas.

1. $\Delta < 0$. Alors (4.1) possède deux solutions réelles u et v et

$$\begin{aligned} q(x, y) &= ay^2\left(\frac{x}{y} - u\right)\left(\frac{x}{y} - v\right) \\ &= a(x - uy)(x - vy) \end{aligned}$$

et cette égalité est vraie même si y est nul. Pour poursuivre, faisons appel à l'identité de polarisation

$$\alpha\beta = \frac{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2}{4}$$

en posant $\alpha = x - uy$ et $\beta = x - vy$. On obtient alors quelque chose du type

$$q(x, y) = a\frac{(2x + \lambda y) - (\mu y)^2}{4}$$

avec λ et μ réels, ce qui prouve que modulo un changement de base, q s'écrit

$$q(x, y) = x^2 - y^2$$

2. $\Delta > 0$. Alors (4.1) possède deux solutions complexes conjuguées c et $\bar{c}$. Il en découle, comme précèdemment, que pour tout couple (x, y),

$$q(x, y) = a(x - cy)(x - \bar{c}y)$$

Si on pose cette fois-ci $\alpha = x - cy$ et $\beta = x - \bar{c}y$, on trouve

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2x - 2\,\mathrm{Re}(c)\,y = 2x - 2ry \\ \alpha - \beta = -2i\,\mathrm{Im}(c)\,y = isy \end{cases}$$

où r et s sont réels, et l'identité de polarisation donne

$$q(x, y) = a\frac{(2x - ry)^2 - (isy)^2}{4} = a\frac{(2x - ry)^2 + s^2y^2}{4}$$

ce qui prouve que modulo un changement de base, q s'écrit

$$q(x, y) = \pm(x^2 + y^2)$$

3. $\Delta = 0$. Alors (4.1) possède une solution réelle double u et on trouve

$$q(x, y) = a(x - uy)^2$$

ce qui prouve que modulo un changement de base, q s'écrit

$$q(x,y) = \pm x^2$$

Nous voyons donc que le discriminant donne la classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$. Nous avons prouvé la

Proposition 4.2. *Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$. On note Δ le discriminant de q. Alors il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de q est*

$$\begin{array}{ll} \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \textit{si } \Delta > 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \textit{si } \Delta < 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \Delta = 0 \end{array}$$

4.3 Rang et morphisme $E \to E^*$

Après avoir étudié le déterminant de la matrice d'une forme quadratique, il est naturel de s'intéresser à son rang. Soient e et u sont des bases de E, alors

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}\Big(\operatorname*{mat}_u \varphi\Big) &= \operatorname{rg}\Big({}^t\operatorname*{mat}_e u \operatorname*{mat}_e \varphi \operatorname*{mat}_e u\Big) \\ &= \operatorname{rg}\Big(\operatorname*{mat}_e \varphi\Big) \end{aligned}$$

En effet, si P et Q sont des matrices inversibles, $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(PMQ)$. Ceci montre que nous pouvons définir le rang d'une forme bilinéaire symétrique comme le rang de n'importe laquelle de ses matrices. Nous pouvons même donner une interprétation de cet invariant :

Définition 4.3. *Soient E un espace vectoriel et φ une forme bilinéaire sur E. L'application linéaire associée à φ est*

$$\begin{array}{rccl} j_\varphi : & E & \longrightarrow & E^* \\ & b & \longmapsto & \varphi(\bullet, b) \end{array}$$

On peut aussi définir

$$\begin{array}{rccl} j^\varphi : & E & \longrightarrow & E^* \\ & a & \longmapsto & \varphi(a, \bullet) \end{array}$$

On notera que si φ est symétrique, les deux applications j_φ et j^φ coïncident.

Proposition 4.4. *Soient E un espace vectoriel de dimension n, (e_i) une base de E et (e_i^*) la base duale associée. Soit φ une forme bilinéaire sur E. Alors*

$$\operatorname*{mat}_{e,e^*} j_\varphi = \operatorname*{mat}_e \varphi$$

Démonstration. Par définition, le coefficient (i, j) de la matrice de j_φ dans les bases e et e^* est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $j_\varphi(e_j)$, c'est à dire $j_\varphi(e_j)(e_i)$ si l'on en croit le lemme 1.4. Or par défintion $j_\varphi(e_j)(e_i) = \varphi(e_i, e_j)$, d'où le résultat. □

On montre de la même manière que la matrice de j^φ dans les bases e et e^* s'obtient en transposant la matrice de φ dans e.

Définition 4.5. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, φ une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée. Le rang de φ et le rang de q sont définis par*

$$\operatorname{rg}(\varphi) = \operatorname{rg}(q) = \operatorname{rg}(j_\varphi)$$

C'est aussi le rang de n'importe quelle matrice de φ.

Le rang d'une forme φ est la dimension du sous-espace de E^* qu'elle détermine naturellement.

Exercice 4.1. Calculer le rang des formes quadratiques apparaissant à la proposition 4.2.

4.4 Noyau

Les formes quadratiques nous permettent de généraliser la notion d'espace euclidien. On rappelle qu'un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire. De manière analogue, un espace pseudo-euclidien est un espace vectoriel E de dimension finie muni d'une forme quadratique q. L'intérêt de cette nouvelle structure est de pouvoir faire de la géométrie dans des espaces plus généraux. Nous dirons que deux vecteurs u et v d'un espace pseudo-euclidien (E, φ, q) sont orthogonaux lorsque $\varphi(u, v) = 0$. La première chose à faire dans l'étude de (E, φ, q) est la recherche des vecteurs qui sont orthogonaux à tous les autres. Ils forment un sous-espace vectoriel noté $E^\perp$ appelé noyau de φ.

Définition 4.6. *Soient E un espace vectoriel, φ une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée. Le noyau de φ est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs. C'est en fait le noyau du morphisme j_φ. On l'appelle ausi noyau de q. On le note $N(\varphi)$, $N(q)$ ou $E^\perp$:*

$$N(\varphi) = N(q) = E^\perp = \{a \in E; \forall b \in E, \varphi(a, b) = 0\} = \ker j_\varphi$$

Le noyau de φ est clairement un sous-espace vectoriel de E.

Avertissement 4.7. Certains étudiants croient que $N(\varphi)$ est l'ensemble des (a, b) qui annulent φ (un peu comme avec le noyau d'une application linéaire). Il n'en est rien. Le seul lien avec la notion de classique de noyau est le fait que $N(\varphi)$ est le noyau de l'application linéaire j_φ. Dans la pratique, φ est donnée par une matrice, et chercher le noyau revient à chercher les colonnes annulant cette matrice, étant donné que cette dernière coïncide avec celle de j_φ.

Signalons que pour une forme bilinéaire φ qui n'est pas symétrique on définit le noyau à gauche et le noyau à droite : le premier étant le noyau de j_φ et le second celui de j^φ.

L'application du théorème du rang à j_φ donne la

Proposition 4.8. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Alors*

$$\dim E = \mathrm{rg}(\varphi) + \dim E^\perp$$

Notons qu'on a le même résultat avec les noyaux à gauche et à droite lorsque φ n'est pas symétrique.

Définition 4.9. *Soient E un espace vectoriel, φ une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée. On dit que φ est non dégénérée si j_φ est bijective. On dit aussi dans ce cas que q est non dégénérée.*

On a clairement la

Proposition 4.10. *Soient E un espace vectoriel et φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i. *φ est non dégénérée.*

ii. *j_φ est injective.*

iii. *j_φ est surjective.*

iv. j_φ *est bijective.*

v. $N(\varphi) = E^\perp = \{0\}$.

vi. φ *est de rang maximal.*

vii. $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim E$.

viii. *Chaque matrice de* φ *est de détérminant non nul (pour cette assertion on suppose que* $E \neq \{0\}$*).*

Dans la pratique c'est l'item $(viii)$ qu'on utilise. Ceci peut induire en erreur en nous faisant croire que le déterminant de φ est bien défini.

Avertissement 4.11. Pour pouvoir garder l'assertion $(viii)$ dans la liste des assertions équivalentes il faut supposer que E n'est pas trivial. Lorsque E est trivial, les sept premières assertions demeurent triviales mais plus la huitième : la forme nulle est non dégénérée sur $\{0\}$ mais son détéminant n'existe pas ! Certains manuels considèrent au contraire que la forme nulle sur $\{0\}$ est dégénérée.

Remarque 4.12. Pour pouvoir garder l'assertion $(viii)$ dans la liste des assertions équivalentes il

Exercice 4.2. On se place dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que tout produit scalaire est une forme non dégénérée. Montrer que la réciproque est fausse.

4.5 Cône d'isotropie

Nous avons dit que la première chose à faire dans un espace (E, q) est la recherche des vecteurs orthogonaux à tous les autres (ils forment le noyau de q). La deuxième chose à faire est la recherche des vecteurs qui sont orthogonaux à eux-mêmes.

Définition 4.13. *Soient* E *un espace vectoriel,* $x \in E$, φ *une forme bilinéaire symétrique sur* E *et* q *la forme quadratique associée. On dit que* x *est* q*-isotrope si* $q(x) = 0$. *On note* $\mathcal{I}(\varphi)$ *ou* $\mathcal{I}(q)$ *l'ensemble des vecteurs* q*-isotropes de* E.

Notons que $\mathcal{I}(q)$ n'est jamais vide puisque 0 est toujours un vecteur isotrope. Notons aussi que

$$E^\perp \subset \mathcal{I}(q)$$

par conséquent si q est « sans isotropie » alors q est non dégénérée (ici « sans isotropie » veut dire que le seul vecteur isotrope est 0). La réciproque est fausse comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 4.14. On munit $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$q(x) = x_1^2 - x_2^2$$

La matrice de q dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que q est non dégénérée (le déterminant de cette matrice n'est pas nul). Les vecteurs isotropes sont clairement les $(t, \pm t)$, pour t décrivant $\mathbb{R}$. Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{I}(q)$ est la paire des droites bissectrices de $\mathbb{R}^2$. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel ! Cette forme est un exemple de forme non dégénérée « possédant de l'isotropie ».

Proposition 4.15. *Soient* E *un espace vectoriel et* φ *une forme bilinéaire symétrique sur* E. *Alors* $\mathcal{I}(\varphi)$ *est un cône.*

Ce qui signifie que si $a \in \mathcal{I}(\varphi)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda a \in \mathcal{I}(\varphi)$. La démonstration de ce résultat est triviale.

Proposition 4.16. *Soient E un espace vectoriel complexe et r et s des formes quadratiques sur E. Alors $\mathcal{I}(r) = \mathcal{I}(s)$ si et seulement si r et s sont proportionnelles.*

Démonstration. Si r et s sont proportionnelles, les deux formes ont clairement le même cône d'isotropie. Inversement, supposons que $\mathcal{I}(r) = \mathcal{I}(s)$. Si $r = 0$ alors l'hypothèse implique $s = 0$, d'où le résultat. Supposons maintenant que ces deux formes sont non nulles. Soient $x \in E$ tel que $r(x) \neq 0$ et $\lambda = \frac{s(x)}{r(x)}$. Soit $y \in E$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose

$$\begin{cases} P(z) = r(y + zx) \\ Q(z) = s(y + zx) \end{cases}$$

On a

$$P(z) = r(y) + 2r(x, y)z + r(x)z^2$$

et

$$Q(z) = s(y) + 2s(x, y)z + \lambda r(x)z^2$$

D'après l'hypothèse, ces deux polynomes de degré deux en z ont les mêmes racines dans $\mathbb{C}$, donc ils sont proportionnels, et vu les coefficients lourds, on trouve $Q = \lambda P$, d'où $s(y) = \lambda r(y)$. Ceci étant vrai pour y quelconque, le résultat est démontré. □

Remarque 4.17. Dans cette proposition on peut remplacer « espace vectoriel complexe » par « espace vectoriel sur un corps algébriquement clos ». Un corps algébriquement clos est un corps sur lequel tout polynôme est scindé.

Ce résultat est faux sur $\mathbb{R}$ comme le montrent les formes $r, s \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^3)$ définies par

$$\begin{cases} r(x, y, z) = x^2 + y^2 \\ s(x, y, z) = x^2 + 2y^2 \end{cases}$$

Elles ont le même cône d'isotropie : la droite d'équations $x = y = 0$, et elles ne sont pas proportionnelles.

Exercice 4.3. Soit E un espace vectoriel réel et r et s des formes quadratiques sur E non dégénérées. Si r et s ont le même cône d'isotropie et ce cône ne se réduit pas à $\{0\}$, alors r et s sont proportionnelles.

Les résultats qui suivent peuvent faire l'objet d'un bon exercice sur les vecteurs isotropes : le but est de trouver une base de (E, q) constituée de vecteurs isotropes.

Lemme 4.18. *Soient E un espace vectoriel et q une forme quadratique non dégénérée sur E possédant un vecteur non nul x isotrope. On note φ la forme polaire de q. Alors il existe $z \in E$ tel que $\varphi(x, z) \neq 0$ et il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $(x, z + kx)$ est libre et $q(z + kx) = 0$.*

Démonstration. La forme q étant non dégénérée, il n'existe aucun vecteur non nul qui soit orthogonal à tous les autres. En particulier x n'est pas orthogonal à tout le monde et il existe $z \in E$ tel que $\varphi(x, z) \neq 0$. Pour trouver k il suffit de résoudre l'équation

$$q(z + kx) = 0$$

qui équivaut à

$$q(z) + 2\varphi(z, x)k = 0$$

puisque $q(x) = 0$. On trouve $k = -\frac{q(z)}{2\varphi(z, x)}$. Le fait que $\varphi(x, z) \neq 0$ implique que (x, z) est libre et donc $(x, z + kx)$ est libre aussi. □

Lemme 4.19. *Soient E un espace vectoriel de dimension n et q une forme quadratique non dégénérée sur E possédant un vecteur non nul x isotrope. On note φ la forme polaire de q. Alors il existe $u_2, \ldots, u_n \in E$ tels que $(x, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de E et pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, $\varphi(x, u_i) \neq 0$.*

Démonstration. La forme linéaire $\varphi(x, \bullet)$ étant non nulle, son noyau K est un hyperplan de E (c'est le sous-espace des vecteurs orthogonaux à x). Nous savons que $x \in K$. Soient $a_2, ..., a_{n-1} \in K$ tels que $(x, a_2, ..., a_{n-1})$ soit une base de K. Soit $z \in E$ tel que $\varphi(x, z) \neq 0$ (z est hors de K). Il est clair alors que $(x, a_2, ..., a_{n-1}, z)$ est une base de E. Il s'ensuit que $(x, a_2 + z, ..., a_{n-1} + z, z)$ est aussi une base de E : c'est la base recherchée puisque $\varphi(x, a_i + z) = \varphi(x, z) \neq 0$ pour tout i. □

Proposition 4.20. *Soient E un espace vectoriel de dimension n et q une forme quadratique non dégénérée sur E possédant un vecteur non nul x isotrope. Alors E possède une base composée exclusivement de vecteurs isotropes.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, E admet une base $(x, u_2, ..., u_n)$ vérifiant $\varphi(x, u_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{2, ..., n\}$. Fixons i. Le lemme 4.18 garantit l'existence de $k_i \in \mathbb{K}$ tel que

$$q(u_i + k_i x) = 0$$

Le système $(x, u_2 + k_2 x, ..., u_n + k_n x)$ est alors une base isotrope de E. □

Chapitre 5
Formes quadratiques définies positives

5.1 Espaces réels et complexes

Définition 5.1. *Soient E un espace vectoriel réel ou complexe et q une forme quadratique sur E. On dit que*

1. *q est définie si $q(x)=0$ implique $x=0$ (i.e. pas de vecteurs isotropes non nuls).*
2. *q est positive si pour tout $x\in E$, $q(x)\geqslant 0$.*
3. *q est négative si pour tout $x\in E$, $q(x)\leqslant 0$.*

Ces qualificatifs s'appliquent également à la forme bilinéaire symétrique associée. La notion 1 existe clairement pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque de caractéristique différente de deux. Forme définie se dit aussi forme anisotrope. On rappelle la

Définition 5.2. *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire sur E symétrique, positive et définie.*

Proposition 5.3. *Il n'existe aucune forme bilinéaire symétrique anisotrope sur un espace vectoriel complexe de dimension supérieure à 1.*

Démonstration. Montrons le par l'absurde en supposant que E est un espace vectoriel complexe de dimension supérieure à 1 et φ une forme bilinéaire symétrique anisotrope. Soient u et v des éléments de E linéairement indépendants. Pour tout $z\in\mathbb{C}$ on pose

$$P(z)=q(zu+v)$$

Clairement

$$P(z)=\varphi(u,u)\,z^2+2\,\varphi(u,v)\,z+\varphi(v,v)$$

et P est un polynome de degré deux en z. Nous savons d'après le théorème fondamental de l'algèbre qu'il existe $z_0\in\mathbb{C}$ tel que $P(z_0)=0$. Ceci montre que z_0u+v est isotrope, ce qui est absurde. □

Corollaire 5.4. *Il n'existe aucun produit scalaire sur un espace vectoriel complexe.*

Démonstration. Nous savons que si la dimension de E est supérieure à 1, il n'y a aucune forme anisotrope sur E, d'où le résultat dans ce cas. Par ailleurs si E est de dimension 1, toute forme quadratique sur E s'écrit

$$q(z)=\lambda z^2$$

(on a identifé E à $\mathbb{C}$) où λ est un nombre complexe. Il s'ensuit que q n'est ni positive, ni négative, d'où le résultat. □

Nous terminons cette section en étudiant les formes anisotropes sur le corps $\mathbb{R}$. La proposition qui suit montre qu'une telle forme q ne peut changer de signe.

Proposition 5.5. *Soient E un espace vectoriel réel et φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i. φ est définie.

ii. *φ est strictement positive ou strictement négative.*

iii. *L'un des deux, φ ou $-\varphi$ est un produit scalaire.*

Démonstration. On notera q la forme quadratique associée à φ. Les assertions (ii) et (iii) sont clairement équivalentes et impliquent (i). Réciproquement, supposons que φ est définie. On sait qu'en dimension 1, φ est de la forme

$$\varphi(x,y)=\lambda xy$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et par conséquent φ est strictement positive ou négative, selon le signe de λ. Supposons que $\dim E \geqslant 2$. Soit $x \in E \backslash \{0\}$. Supposons sans perte de généralité que $q(x)>0$. Alors pour tout y de la droite vectorielle $\mathbb{R}x$, $q(y) \geqslant 0$. Soit maintenant y un vecteur linéairement indépendant de x. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, notons

$$P(\lambda)=q(\lambda x+y)$$

Clairement

$$P(\lambda)=q(x)\lambda^2+2\varphi(x,y)\lambda+q(y)$$

L'anisotropie de φ implique que P ne s'annule nulle part dans $\mathbb{R}$, et par conséquent le discriminant de P est strictement négatif, or

$$\Delta(P)=4(\varphi(x,y)^2-q(x)\,q(y))$$

d'où

$$q(x)\,q(y)>0$$

Nous avons démontré que pour tout y non nul, $q(x)$ et $q(y)$ ont le même signe. □

Cette démonstration n'est pas sans rappeler celle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

5.2 Matrices définies positives

Toute matrice symétrique A d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ définit naturellement une forme quadratique sur l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des n-colonnes (que nous identifions à $\mathbb{K}^n$) :

$$X \longmapsto X^t A X$$

Il en découle la

Définition 5.6. *Soit $A \in \mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$. On dit que A est positive (resp. négative, définie) si la forme quadratique définie par A est positive (resp. négative, définie).*

Lorsqu'une matrice A est positive on note $A \geqslant 0$. Ceci nous inspire la

Définition 5.7. *Relation d'ordre de Loewner. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$. On dit que A est inférieure à B, et on note $A \leqslant B$, si $B-A$ est positive.*

Tout ceci a du sens parce que $B-A$ est symétrique : n'oublions pas que $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 5.8. *La relation de Loewner est une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$.*

Nous pouvons donc parler de suites croissantes ou bornées dans l'espace $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$. La première question qui nous assaille est alors : « les suites monotones et bornées de $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ sont-elles convergentes ? ». Nous allons pouvoir répondre à cette question en examinant la relation de Loewner de plus près. Soit Q une matrice symétrique réelle d'ordre n, et q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée. Si on regarde bien, la relation $Q \geqslant 0$ signifie tout simplement que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $q(x) \geqslant 0$. De même $A \leqslant B$ signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $a(x) \leqslant b(x)$ (où a et b sont les formes quadratiques associées à A et B). Ainsi, la relation de Loewner n'est rien d'autre que la transposition sur $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ de la relation d'ordre bien connue sur les fonctions de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, qui elle-même n'est qu'un héritage naturel de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. C'est ce point de vue que adopterons pour prouver la proposition ci-dessous.

Proposition 5.9. *Soit (A_k) une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$. Si (A_k) est croissante et majorée alors elle converge dans $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$.*

Nous ne l'avons pas dit mais ici $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ est muni d'une norme (n'importe laquelle puisqu'elles sont toutes équivalentes). C'est la norme qui donne un sens à la notion de convergence.

Démonstration. Dire que (A_k) converge équivaut à dire que pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$, le coefficient (i, j) de A_k converge. On notera A_{ij}^k ce coefficient. On suppose ici qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k \leqslant M$. Notons a_k et m les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ définies par A_k et M, respectivement. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. La croissance de (A_k) se traduit par la croissance de (a_k) et a pour conséquence la croissance de $(a_k(x))$. Le fait que (A_k) soit majorée par M se traduit par le fait que (a_k) est majorée par m et donc $(a_k(x))$ est majorée par $m(x)$. Ainsi, $(a_k(x))$ est une suite croissante et majorée de nombres réels. Cette dernière converge donc forcément vers un réel que nous notons $a(x)$ puisqu'il dépend de la valeurs de x. Nous venons de prouver que la suite de fonctions (a_k) converge simplement vers une fonction $a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pour démontrer que a est une forme quadratique nous introduisons l'application $\alpha\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\alpha(x, y) = \frac{a(x+y) - a(x) - a(y)}{2}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= \frac{\lim a_k(x+y) - \lim a_k(x) - \lim a_k(y)}{2} \\ &= \lim \left(\frac{a_k(x+y) - a_k(x) - a_k(y)}{2} \right) \\ &= \lim \alpha_k(x, y) \end{aligned}$$

où bien entendu α_k est la forme polaire de a_k. Ainsi α est la limite simple d'une suite de formes bilinéaires symétriques. Les propriétés de la limite impliquent que α est une forme bilinéaire symétrique elle aussi. Puisque pour tout x, $a(x) = \alpha(x, x)$, nous pouvons dire que a est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à α. Nous savons maintenant que la suite de formes quadratiques (a_k) converge vers une forme a. Regardons ce que cela donne au niveau des matrices. Soit A la matrice de a dans la base canonique (ainsi a est la forme quadratique définie par A). Notons (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et A_{ij} le coefficient (i, j) de A. On a

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \alpha(e_i, e_j) \\ &= (\lim \alpha_k)(e_i, e_j) \\ &= \lim (\alpha_k(e_i, e_j)) \\ &= \lim A_{ij}^k \end{aligned}$$

Par conséquent la suite (A_k) converge vers A. □

Chapitre 6
Réduction des formes quadratiques

6.1 Réduction dans le cas général

Nous savons que tout espace euclidien (E, φ) possède des bases φ-orthonormées et que dans une telle base, $\varphi(a,b)$ prend la forme

$$\varphi(a,b) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$$

et $q(a)$ la forme

$$q(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

Nous allons généraliser ce résultat aux formes bilinéaires symétriques quelconques.

Définition 6.1. *Soient E un espace vectoriel de dimension n muni d'une forme bilinéaire symétrique φ et (e_i) une base de E.*

1. *On dit que (e_i) est orthogonale si pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ tel que $i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.*
2. *On dit que (e_i) est orthonormée si pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$, $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.*

On rappelle que δ_{ij} est le symbole de Kronecker, il vaut 1 si $i = j$, et 0 sinon. L'item 2 nous intéresse surtout lorsque le corps des scalaires est $\mathbb{R}$.

On notera que les assertions suivantes sont équivalentes :

i. La base (e_i) est q-orthogonale.

ii. Dans la base (e_i) la forme q s'écrit

$$q(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i^2$$

iii. Dans la base (e_i) la matrice de q est diagonale.

De la même manière nous avons les équivalences :

i. La base (e_i) est q-orthonormée.

ii. Dans la base (e_i) la forme q s'écrit

$$q(u) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

iii. Dans la base (e_i) la matrice de q est la matrice identité.

Le cas échéant il est clair que q est un produit scalaire.

Théorème 6.2. *Réduction dans le cas général. Nous donnons deux formulations différentes du même résultat :*

A) Tout espace pseudo-euclidien (E, q) possède une base orthogonale.

B) Tout espace pseudo-euclidien (E, q) de dimension finie possède une base dans laquelle la matrice de q est diagonale.

Autrement dit, il existe $r \in \{1, ..., n\}$, une base $(e_1, ..., e_n)$ et des scalaires non nuls $\lambda_1, ..., \lambda_r$ tels que

$$\operatorname*{mat}_e q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Evidemment r est le rang de q.

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur n, la dimension de E. Pour $n = 1$ le résultat est trivial. Supposons-le vrai pour les espaces de dimension $n - 1$. Soit (E, q) un espace de dimension n. Si $q = 0$, le résultat est trivial, nous supposerons donc qu'il existe $a \in E$ tel que $q(a) \neq 0$. On pose

$$\langle a \rangle^{\perp} = \{b \in E\,; \varphi(a, b) = 0\}$$

On l'appelle l'orthogonal de a, c'est le sous-espace des éléments q-orthogonaux à a. On notera que

$$\langle a \rangle^{\perp} = \ker \varphi(\bullet, a)$$

et puisque la forme linéaire $\ker \varphi(\bullet, a)$ n'est pas nulle, l'orthogonal de a est un hyperplan de E. Puisque par ailleurs $a \notin \langle a \rangle^{\perp}$, nous avons

$$E = \langle a \rangle \oplus \langle a \rangle^{\perp}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, l'orthogonal de a possède une base q-orthogonale $(e_1, ..., e_{n-1})$. La famille $(a, e_1, ..., e_{n-1})$ est alors une base q-orthogonale de E. □

Bien que nous le traitions plus loin (au paragraphe ?), nous souhaiterions faire une remarque sur le cas « réel ». Nous disposons en effet dans ce cas d'un raccourci : le théorème spectral. Ce dernier affirme que toute matrice symétrique réelle d'ordre n est diagonalisable dans une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Ainsi, si A désigne la matrice de q dans une base de E, la symétrie de cette matrice implique l'existence de $P \in O(n, \mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Or le fait que P soit orthogonale implique que ${}^tP = P^{-1}$, et donc ${}^tPAP$ est diagonale, d'où le résultat.

Cette preuve algébrique établit un curieux lien entre les formes quadratiques et les endomorphismes. On peut dans la pratique profiter de ce lien pour réduire notre forme réelle q. Concrètement, on appelle e la base de E dans laquelle la matrice de q est A et on diagonalise cette dernière. Cela consiste à chercher les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de A, et des vecteurs propres $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ associés à chacune de ces valeurs. On prend soin de choisir ces vecteurs de manière à ce qu'ils forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Ce dernier point est fondamental. On obtient ainsi une matrice diagonale D :

$$D = P^{-1} A P$$

où P est la matrice de la base $(v_1, ..., v_n)$ dans la base canonique. Ensuite on transpose cette écriture à (E, q) en définissant la base $(a_1, ..., a_n)$ de E par

$$\operatorname*{mat}_e (a_1, ..., a_n) = P$$

Dans cette base q est réduite.

Remarque 6.3. Le théorème spectral est un résultat propre au corps $\mathbb{R}$. Premièrement, dans un espace complexe E il n'y a pas de bases orthonormées : pour obtenir une notion analogue il faut remplacer la notion de produit scalaire par la notion de produit hermitien, nous l'avons déjà signalé. Deuxièmement, il existe des matrices symétriques complexes qui ne sont pas diagonalisables, c'est le cas par exemple de

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

On laisse au lecteur le soin de le vérifier.

6.2 Méthode de Gauss

Nous donnons ici une autre manière d'établir le théorème de réduction. Cette méthode dûe à Carl Friedrich Gauss est pratique pour les exercices, et permet d'obtenir explicitement et facilement une base orthogonale. Commençons par reformuler le théorème de réduction.

Théorème 6.4. *Réduction, troisième version. Soient* (E, q) *un espace pseudo-euclidien et* r *le rang de* q*. Alors il existe* r *formes linéaires* $\omega_1, \ldots, \omega_r$ *sur* E *linéairement indépendantes et* r *scalaires* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *tels que*

$$q = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \omega_i^2$$

Démonstration. On sait d'après le théorème de réduction que E possède une base e dans laquelle la matrice de q s'écrit $\mathrm{mat}_e\, q = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$, avec des coefficients λ_i non nuls. Soit $a \in E$. Notons (x_i) les coordonnées de a dans la base e. On a

$$q(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2$$

et en posant $\omega = e^*$ (base duale associée à la base e) on obtient

$$q = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \omega_i^2$$

□

Gardons les hypothèses de cette proposition de sorte que $q(a)$ s'écrive

$$q(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2$$

dans la base e. Dans la pratique nous connaissons q non pas dans e mais dans une base u quelconque. Notons (y_i) les coordonnées de a dans u et $(c_{ij}) = \mathrm{mat}_e\, u$, la matrice de passage de e vers u, de sorte que pour chaque i

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j$$

On obtient alors une formule intéressante pour q dans la base u :

$$q(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (c_{i1} y_1 + \ldots + c_{in} y_n)^2$$

On insiste sur le fait que c'est le théorème de réduction qui garantit l'existence d'une telle expression. La méthode de Gauss permet, comme nous allons le voir, de trouver cette expression directement à partir d'une expression du type (3.2), sans utiliser le théorème de réduction. Reprenons tout à zéro !

Lemme 6.5. *Soient* $\mathbb{K}$ *un corps et* $x_1, x_2, A, B \in \mathbb{K}$*. Alors*

$$x_1 x_2 + x_1 B + A x_2 = (x_1 + A)(x_2 + B) - AB$$

Démonstration. Cette formule n'est qu'une reformulation de la double-distributivité. □

Théorème 6.6. *Réduction, quatrième version. Soient* $\mathbb{K}$ *un corps de caractéristique différente de deux,* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* q *une forme quadratique sur* $\mathbb{K}^n$ *de rang* r*. Alors il existe une matrice* $(c_{ij}) \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$ *de rang* r*, ainsi que des scalaires* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$*, tels que pour tout* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (c_{i1} x_1 + \ldots + c_{in} x_n)^2$$

Démonstration. Nous savons que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$q(x) = \sum_{i \leqslant j} a_{ij} x_i x_j \tag{6.1}$$

et on note m le nombre de variables x_i effectivement présentes dans cette expression. Attention : ceci est la formule nettoyée de q (voir remarque 3.7). Si $i = j$, a_{ij} est le coefficient (i, j) de la matrice de q dans la base canonique, sinon a_{ij} est le double du coefficient (i, j). Dans certains manuels on écrit $2a_{ij}$ pour les indices i, j distincts. Procédons par récurrence sur m. Si $m = 1$ alors $q(x)$ est de la forme

$$q(x) = \lambda x_i^2$$

et le résultat est établi d'emblée. Supposons le résultat vrai pour toutes les formes quadratiques sur $\mathbb{K}^n$ s'écrivant avec moins de m variables. Soit q une forme écrite comme (6.1) avec m variables. Distingons deux cas

1. L'un des a_{ii} est non nul. Quitte à permuter les indices nous dirons que $a_{11} \neq 0$. On sépare alors dans (6.1) les monomes contenant x_1 des autres :

$$q(x) = a_{11} x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} a_{1i} x_1 x_i + \sum_{2 \leqslant i \leqslant j} a_{ij} x_i x_j$$

pour essayer de faire apparaître un $x_1^2 + 2x_1 b + b^2$ avec les deux premiers termes :

$$\begin{aligned} a_{11} x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} a_{1i} x_1 x_i &= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{11}} x_i + \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{11}} x_i \right)^2 - \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{11}} x_i \right)^2 \right) \\ &= a_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{11}} x_i \right)^2 - a_{11}\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{11}} x_i \right)^2 \end{aligned}$$

ainsi

$$q(x) = \underbrace{a_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{11}} x_i \right)^2}_{} \underbrace{- \; a_{11}\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{11}} x_i \right)^2 + \sum_{2 \leqslant i \leqslant j} a_{ij} x_i x_j}_{}$$

On note $r(x)$ la première quantité soulignée et $s(x)$ la deuxième. Il est clair que $s(x)$ est une forme quadratique qui ne s'écrit qu'avec $m - 1$ variables (puisqu'elle ne contient pas x_1). Ainsi d'après l'hypothèse de récurrence, $s(x)$ s'écrit

$$s(x) = \sum_{i=2}^{\ell} \lambda_i (c_{i2} x_2 + \ldots + c_{in} x_n)^2$$

avec $\ell - 1 = \mathrm{rg}(s)$, et pour tout $i \in \{2, \ldots, \ell\}$, $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$ et $c_{i2}, \ldots, c_{in} \in \mathbb{K}$. Par ailleurs, si on pose

$$\begin{cases} \lambda_1 = a_{11} \\ c_{11} = 1 \end{cases}$$

et pour tout $j \in \{2, \ldots, n\}$,

$$c_{1j} = \frac{a_{1i}}{2a_{11}}$$

alors $r(x)$ est égal à

$$r(x) = \lambda_1 (c_{11} x_1 + \ldots + c_{1n} x_n)^2$$

Le fait que s soit de rang $\ell - 1$ implique que les formes linéaires « $c_{i2} x_2 + \ldots + c_{in} x_n$ » apparaissant dans sa décomposition sont linéairement indépendantes. Le fait qu'aucune de ces formes ne « contienne » la variable x_1 implique que la forme linéaire « $c_{11} x_1 + \ldots + c_{1n} x_n$ » apparaissant dans r, ne peut être développée dans le système formé par les « $c_{i2} x_2 + \ldots + c_{in} x_n$ » ; n'oublions pas que c_{11} est non nul. Ainsi le système formé par toutes les formes « $c_{i1} x_1 + \ldots + c_{in} x_n$ », pour i allant de 1 à ℓ, est libre (nous avons posé $c_{i1} = 0$ pour tous les i de $\{2, \ldots, \ell\}$). Nous avons donc

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (c_{i1} x_1 + \ldots + c_{in} x_n)^2$$

et toutes les formes linéaires apparaissant dans cette décomposition sont linéairement indépendantes. Par conséquent la matrice $(c_{ij}) \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$ apparue ici est de rang r.

2. Tous les a_{ii} sont nuls. Dans ce cas $q(x)$ ne s'écrit qu'avec des rectangles

$$q(x) = \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

et quitte à permuter les indices nous pouvons supposer que $a_{12} \neq 0$. Décomposons $q(x)$ selon les termes qui contiennent x_1, ceux qui contiennent x_2 et les autres :

$$q(x) = a_{12} x_1 x_2 + x_1 \sum_{i=3}^{n} a_{1i} x_i + \left(\sum_{i=3}^{n} a_{2i} x_i \right) x_2 + \sum_{2<i<j} a_{ij} x_i x_j$$

Concentrons-nous sur les trois premiers termes :

$$\begin{aligned} & a_{12} x_1 x_2 + x_1 \sum_{i=3}^{n} a_{1i} x_i + \left(\sum_{i=3}^{n} a_{2i} x_i \right) x_2 \\ = \; & a_{12} \left(x_1 x_2 + x_1 \sum_{i=3}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{12}} x_i + \left(\sum_{i=3}^{n} \frac{a_{2i}}{a_{12}} x_i \right) x_2 \right) \\ = \; & a_{12} \left(\left(x_1 + \sum_{i=3}^{n} \frac{a_{2i}}{a_{12}} x_i \right) \left(x_2 + \sum_{i=3}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{12}} x_i \right) - \left(\sum_{i=3}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{12}} x_i \right) \left(\sum_{i=3}^{n} \frac{a_{2i}}{a_{12}} x_i \right) \right) \end{aligned}$$

La dernière égalité n'est que l'application du lemme précèdent. Posons

$$\begin{cases} \alpha(x) = x_1 + \sum_{i=3}^{n} \frac{a_{2i}}{a_{12}} x_i \\ \beta(x) = x_2 + \sum_{i=3}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{12}} x_i \\ s(x) = -a_{12} \left(\sum_{i=3}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{12}} x_i \right) \left(\sum_{i=3}^{n} \frac{a_{2i}}{a_{12}} x_i \right) + \sum_{2<i<j} a_{ij} x_i x_j \end{cases}$$

Nous avons montré que

$$q(x) = a_{12}\, \alpha(x)\, \beta(x) + s(x)$$

où s est une forme quadratique s'écrivant avec $m-2$ variables (x_1 et x_2 n'y figurent pas). D'après l'hypothèse de récurrence, $s(x)$ s'écrit

$$s(x) = \sum_{i=3}^{\ell} \lambda_i \left(c_{i3} x_3 + \ldots + c_{in} x_n \right)^2$$

avec $\ell - 2 = \mathrm{rg}(s)$, et pour tout $i \in \{3, \ldots, \ell\}$, $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$ et $c_{i3}, \ldots, c_{in} \in \mathbb{K}$, ou encore, ce qui revient au même

$$s = \sum_{i=3}^{\ell} \lambda_i \omega_i^2$$

où $\omega_3, \ldots, \omega_\ell$ sont des formes linéaires linéairement indépendantes.

Pour le premier terme, à savoir $a_{12}\, \alpha(x)\, \beta(x)$, nous appliquons la troisième identité de polarisation

$$\alpha \beta = \frac{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2}{4}$$

On pose alors

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \psi = \frac{\alpha - \beta}{2} \end{cases}$$

de sorte que $q(x)$ possède l'écriture escomptée

$$q(x) = a_{12}\, \varphi(x)^2 + a_{12}\, \psi(x)^2 + \sum_{i=3}^{\ell} \lambda_i \omega_i(x)^2$$

Il ne reste plus qu'à montrer que le système $(\varphi,\ \psi,\ \omega_3,\ \ldots,\ \omega_\ell)$ est libre, ce qui ne pose aucun problème. Supposons en effet qu'il existe des scalaires $c_1, \ldots, c_\ell$ tels que

$$c_1\,\varphi + c_2\,\psi + c_3\,\omega_3 + \ldots + c_\ell\,\omega_\ell = 0 \tag{6.2}$$

En appliquant cette égalité en $(1, 1, \ldots, 0)$ on obtient

$$c_1\,\varphi + c_2\,\varphi = 0$$

or le système (α, β) étant libre (α contient la variable x_1 tandis que β ne la contient pas), le système $(\varphi,\ \psi)$ est libre aussi (on passe du premier système au second par l'action d'une matrice inversible) et donc $c_1 = c_2 = 0$ et (6.2) s'écrit

$$c_3\,\omega_3 + \ldots + c_\ell\,\omega_\ell = 0$$

et implique $c_3 = \ldots = c_\ell = 0$, étant donné que $(\omega_3, \ldots, \omega_\ell)$ est libre.

□

Tout ceci prend de la valeur sur des exemples :

Exemple 6.7. Etudions

$$q(x, y, z) = x\,y + x\,z$$

On a $q(x, y, z) = x\,y + x\,z + 0\,y = (x + 0)\,(y + z) - 0\,z$, compte tenu de l'identité

$$x\,y + x\,B + A\,y = (x + A)\,(y + B) - A\,B$$

(voir lemme plus haut) ainsi

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= \frac{(x + y + z)^2 - (x - y - z)^2}{4} \\ &= \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}\right)^2 \\ &= x'^2 - y'^2 \end{aligned}$$

où (x', y', z') sont les coordonnées définies par le changement

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \\ y' = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} \\ z' = z \end{cases}$$

Exemple 6.8. Etudions

$$q(x, y, z, t) = x^2 - x\,y + x\,z + 2\,y\,t$$

On a $x^2 - x\,y + x\,z = x^2 + 2x\,\frac{z - y}{2} + \frac{(z - y)^2}{4} - \frac{(z - y)^2}{4} = \left(x + \frac{z - y}{2}\right)^2 - \frac{(z - y)^2}{4}$ et donc

$$q(x, y, z, t) = \left(x + \frac{z - y}{2}\right)^2 - \frac{(z - y)^2}{4} + 2\,y\,t$$

Traitons ce qu'il y a après le carré :

$$\begin{aligned} -\frac{(z - y)^2}{4} + 2\,y\,t &= -\frac{z^2}{4} + \frac{z\,y}{2} - \frac{y^2}{4} + 2\,y\,t \\ &= -\frac{1}{4}\left(z^2 - 2\,z\,y\right) - \frac{y^2}{4} + 2\,y\,t \\ &= -\frac{1}{4}\left((z - y)^2 - y^2\right) - \frac{y^2}{4} + 2\,y\,t \\ &= -\frac{1}{4}\,(z - y)^2 + \frac{1}{2}\left(y^2 + 4\,y\,t\right) \end{aligned}$$

où

$$y^2 + 4\,y\,t = (y + 2\,t)^2 - 4\,t^2$$

Finallement

$$\begin{aligned} q(x,y,z,t) &= \left(x+\frac{z}{2}-\frac{y}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(z-y)^2 + \frac{1}{2}(y+2t)^2 - 2t^2 \\ &= x'^2 - \frac{1}{4}y'^2 + \frac{1}{2}z'^2 - 2t'^2 \end{aligned}$$

où (x', y', z', t') sont des coordonnées définies par

$$\begin{cases} x' = x + \frac{z}{2} - \frac{y}{2} \\ y' = z - y \\ z' = y + 2t \\ t' = t \end{cases}$$

6.3 Réduction dans le cas complexe

Lorsque le corps des scalaires est $\mathbb{C}$ nous pouvons réduire davantage les formes quadratiques. Ceci est dû au fait que tout nombre complexe est un carré. Soit E un espace complexe. Nous savons alors que E possède une base q-orthogonale $(e_1, ..., e_n)$. Quitte à permuter les indices, nous classons ces vecteurs en deux groupes de sorte que $e_1, ..., e_r$ soient anisotropes et $e_{r+1}, ..., e_n$ isotropes. Pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, on note r_i une racine carrée de $q(e_i)$ et on pose

$$\varepsilon_i = \frac{e_i}{r_i}$$

Il est évident que ε_i est normé, c'est à dire

$$q(\varepsilon_i) = 1$$

Pour les autres valeurs de i, on pose

$$\varepsilon_i = e_i$$

Il est évident alors que la matrice de q dans la nouvelle base ε est diagonale avec que des 1 et des 0 dans la diagonale :

$$\operatorname*{mat}_{\varepsilon} q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de q est le nombre de coefficients égaux à 1. Nous venons de prouver le

Théorème 6.9. *Réduction dans le cas complexe. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n muni d'une forme quadratique q de rang r. Nous donnons deux formulations du même résultat :*

A) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de q est diagonale avec uniquement des zéros et des 1. Exactement r fois le coefficient 1.

B) Il existe une base de E dans laquelle q s'écrit

$$q(x) = x_1^2 + ... + x_r^2$$

Remarque 6.10. Dans ce théorème on peut remplacer « espace vectoriel complexe » par « espace vectoriel sur un corps algébriquement clos, de caractéristique différente de deux », puisque dans un tel corps tout élément possède une racine carrée.

Remarque 6.11. On aurait pu établir ce résultat en travaillant directement sur l'expression de q, à la manière de « Gauss ». Nous savons en effet qu'il existe des coefficients complexes $\lambda_1, ..., \lambda_r$ tels que

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2$$

Pour chaque i notons α_i une des deux racines carrées de λ_i. On a alors

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i x_i)^2$$

et il suffit de faire le changement de coordonnées suivant : pour tout $i \in \{1, ..., r\}$,

$$x_i' = \alpha_i x_i$$

et pour tout $i \in \{r, ..., n\}$,

$$x_i' = x_i$$

La proposition 5.3 devient évidente maintenant que nous connaissons la forme réduite des formes quadratiques complexes. Il suffit de considérer le vecteur $\varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ (ici ε désigne la base dans laquelle q est réduite). On a clairement $q(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) = 0$.

Corollaire 6.12. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation d'équivalence « être congrue à » définie sur $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{C})$ est tout simplement la relation « avoir le même rang ».*

6.4 Réduction dans le cas réel

Nous déduisons de ce qui précède la réduction ultime en situation réelle. Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et q une forme quadratique sur E de rang r. Soit (e_i) une base dans laquelle la matrice de q est diagonale. Comme au paragraphe précèdent, nous supposons que les vecteurs e_1, ..., e_r sont anisotropes et les vecteurs e_r, ..., e_n isotropes. La matrice de q dans e s'écrit

$$\operatorname*{mat}_e q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec λ_i, ..., $\lambda_r \in \mathbb{R}^*$. Ces coefficients se scindent en deux groupes : les positifs et les négatifs. Disons qu'il y a p coefficients positifs et s négatifs ($p + s = r$). Quite à permuter les indices nous supposons que $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont positifs (les autres sont alors les négatifs). Pour tout $i \in \{1, ..., r\}$ on pose

$$\varepsilon_i = \frac{e_i}{\sqrt{|\lambda|}}$$

et pour tout $i \in \{r + 1, ..., n\}$

$$\varepsilon_i = e_i$$

Il est clair que

$$q(\varepsilon_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \{1, ..., p\} \\ -1 & \text{si } i \in \{s, ..., r\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice de q dans la base ε est une diagonale constituée de p coefficients égaux à 1, q coefficients égaux à -1 et $n - r$ coefficients nuls. En fait on a le

Théorème 6.13. *Réduction dans le cas réel, loi d'inertie de Sylvester. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n muni d'une forme quadratique q de rang r. Alors il existe un entier $p \in \{0, ..., r\}$ et une base de E dans laquelle la matrice de q est une diagonale constituée de p coefficients égaux à 1, $r - p$ coefficients égaux à -1 et $n - r$ coefficients nuls. dans cette base la forme q s'écrit*

$$q(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2$$

De plus l'entier p vérifiant cette propriété est unique.

Démonstration. Nous avons déjà établi l'existence d'un tel entier p, il ne reste plus qu'à prouver l'unicité. Supposons que dans une base (u_i) la matrice de q est une diagonale constituée de p' coefficients égaux à 1, $r-p'$ coefficients égaux à -1 et $n-r$ coefficients nuls. Posons

$$\begin{cases} E_{\mathrm{I}} = \mathrm{vect}\langle e_1, \ldots, e_p\rangle \\ E_{\mathrm{II}} = \mathrm{vect}\langle e_{p+1}, \ldots, e_n\rangle \\ F_{\mathrm{I}} = \mathrm{vect}\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\rangle \\ F_{\mathrm{II}} = \mathrm{vect}\langle \varepsilon_{p+1}, \ldots, \varepsilon_n\rangle \end{cases}$$

Montrons alors que E_{I} et F_{II} sont en somme directe. Soit $x \in E_{\mathrm{I}} \cap F_{\mathrm{II}}$. De l'appartenance à E_{I} on déduit $q(x) \geqslant 0$ et de l'appartenance à F_{II}, $q(x) \leqslant 0$. Ainsi $q(x) = 0$. Ceci prouve que x est nul car la restriction de q est un produit scalaire sur E_{I}, et donc sur $E_{\mathrm{I}} \cap F_{\mathrm{II}}$. Il s'ensuit que la somme des dimensions de E_{I} et F_{II} est inférieure ou égale à n, autrement dit

$$p + (n - p') \leqslant n$$

c'est à dire

$$p \leqslant p'$$

On démontre de manière « symétrique » que $p \geqslant p'$, d'où le résultat. □

Ce théorème nous permet de poser la

Définition 6.14. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension n muni d'une forme quadratique q de rang r. On note p le nombre de coefficients égaux à 1 apparaissant dans les réductions de q données au théorème de Sylvester. La signature de q est le couple d'entiers $(p,\ r-p)$. On la note* $\mathrm{sign}(q)$ *:*

$$\mathrm{sign}(q) = (p, r-p)$$

La signature est l'invariant permettant de classifier les formes quadratiques réelles. Dans la signature on peut lire

- l'anisotropie,
- la positivité,
- la négativité,
- la dégénerescence,

Nous avons en effet le résultat suivant, corollaire du théorème de Sylvester :

Corollaire 6.15. *Soit q une forme quadratique réelle de rang r et signature $(p, r-p)$. Alors*

1. *q est définie si et seulement si $\mathrm{sign}(q) = (n,0)$ ou $\mathrm{sign}(q) = (0,n)$.*
2. *q est positive si et seulement si $p = r$, c'est à dire $\mathrm{sign}(q) = (r,0)$.*
3. *q est négative si et seulement si $p = 0$, c'est à dire $\mathrm{sign}(q) = (0,r)$.*
4. *q est non dégénérée si et seulement si $\mathrm{sign}(q) = (p, n-p)$.*
5. *Si q est définie, soit q est positive, soit q est négative.*

Nous avons déjà démontré l'item 5 (proposition 5.5).

Dans la pratique, on calcule la signature d'une forme q sur un espace réel E à partir d'une quelconque de ses matrices. Si A est la matrice de q dans une base, on cherche tout simplement les valeurs propres de A. Le nombre p est le nombre de valeurs propres strictement positives et le nombre $r-p$ celui des valeurs strictement négatives. On obtient ainsi assez rapidement l'écriture réduite de q. On rappelle que pour trouver une base de réduction on cherche une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ diagonalisant A. On transpose alors cette base dans E. Attention toutefois à ne pas confondre les objets intervenant ici : les valeurs popres de A ne sont pas des invariants de q. Résumons :

Corollaire 6.16. *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$. *La relation d'équivalence « être congrue à » définie sur* $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ *est la relation « avoir la même signature », c'est à dire la relation « avoir le même nombre de valeurs propres strictement positives et le même nombre de valeurs propres strictement négatives ».*

Une autre méthode pour calculer la signature consiste à réduire l'expression de $q(x)$ par la méthode de Gauss. On sait que le résultat est une somme algébrique de carrés. On trouve la signature en comptant le nombre de signes $+$ et le nombre de signe $-$ dans cette somme.

Exemple 6.17. On reprend l'exemple 2.18 avec $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $q(A)=\det A$. Si on note $A=\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ on a $q(A)=ad-bc$. En appliquant la méthode de Gauss on trouve

$$q(A)=\left(\frac{a+d}{2}\right)^2-\left(\frac{a-d}{2}\right)^2-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{sign}(q)=(2,2)$$

La base réduisant q est donnée par le changement

$$\begin{cases} x=\frac{a+d}{2}\\ y=\frac{b-c}{2}\\ z=\frac{a-d}{2}\\ t=\frac{b+c}{2}\end{cases}$$

dont l'inverse est

$$\begin{cases} a=x+z\\ b=y+t\\ c=t-y\\ d=x-y\end{cases}$$

Ainsi $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\right)$ est une base q-orthogonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Le cône d'isotropie est l'ensemble des matrices non inversibles. Son équation dans la base q-orthogonale est

$$x^2+y^2=z^2+t^2$$

6.5 Réduction sur un corps fini de caractéristique différente de deux

Lemme 6.18. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps fini de caractéritique différente de deux. On note* q *le cardinal de* $\mathbb{K}$, C *l'ensemble des carrés non nuls de* $\mathbb{K}$ *et* N *l'ensemble des non carrés non nuls de* $\mathbb{K}$, *de sorte que* $\mathbb{K}$ *se partitionne en* $\{0\}$, C *et* N. *Alors*

1. *Il y a* $\frac{q+1}{2}$ *carrés dans* $\mathbb{K}$ *(i.e. le cardinal de* C *est* $\frac{q-1}{2}$*).*
2. *Si* $\delta\in N$ *alors* $c\mapsto\delta c$ *établit une bijection de* C *sur* N, *et donc* $N=\delta C$.

Démonstration. Nous allons utiliser le groupe $(\mathbb{K}^*,\times)$ et l'application

$$\begin{array}{rccc}\psi: & \mathbb{K}^* & \longrightarrow & \mathbb{K}^*\\ & x & \longmapsto & x^2\end{array}$$

qui est clairement un morphisme de groupes dont l'image est C et le noyau $\{\pm 1\}$. Il s'ensuit que C est isomorphe à $\mathbb{K}^*/\{\pm 1\}$. Le fait que la caractéristique de $\mathbb{K}$ soit différente de deux implique que $\{\pm 1\}$ compte bien deux éléments distincts, et donc

$$|C|=\frac{q-1}{2}$$

Si on tient compte de zéro on trouve bien $\frac{q+1}{2}$ éléments carrés dans $\mathbb{K}$.

Fixons maintenant δ dans N et considérons l'application

$$\begin{array}{rccc}\lambda & : \mathbb{K}^* & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ & x & \longmapsto & \delta x\end{array}$$

C'est clairement une bijection (la réciproque est $x \mapsto \delta^{-1}x$) qui envoie C dans N :

$$\lambda(C) \subset N$$

et donc

$$\lambda_{|C} \ : \ C \longrightarrow N$$

est une injection. La source et le but ayant le même cardinal, c'est forcément une bijection. □

Gardons ce même corps et regardons à quoi ressemblent les formes quadratiques sur $\mathbb{K}$. Fixons une fois pour toutes un élément δ dans N (on se ramènera toujours à lui). Nous savons que si $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{K})$ est non nulle, alors il existe $k \in \mathbb{K}^*$ tel que

$$q: x \longmapsto kx^2$$

Si $k \in C$, il existe $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que $k = \gamma^2$ et

$$q(x) = kx^2 = (\gamma x)^2$$

ce qui montre que q est équivalente à $x \mapsto x^2$.

Remarque 6.19. Si on note $e_1 = 1$, (e_1) est la base canonique de $\mathbb{K}$. On pose $e_1' = \frac{e_1}{\gamma}$ ce qui équivaut au changement de coordonnées

$$y = \gamma x$$

Dans le nouveau système (y) désigne l'élément $ye_1' = y\frac{e_1}{\gamma} = \frac{y}{\gamma}$ et la forme q s'écrit :

$$q: (y) \longmapsto y^2$$

Regardons maintenant ce qui se passe si $k \in N$. Nous savons qu'il existe alors $a \in \mathbb{K}$ tel que $k = \delta a^2$ (lemme précédent) et donc

$$q(x) = kx^2 = \delta a^2 x^2 = \delta (ax)^2$$

ce qui prouve que q équivaut à la forme $x \mapsto \delta x^2$.

Finalement : toute forme quadratique non nulle sur $\mathbb{K}$ est équivalente soit à $x \mapsto x^2$, soit à $x \mapsto \delta x^2$, et il est facile de voir que ces deux formes ne sont pas équivalentes. En effet, tout changement de coordonnées sur $\mathbb{K}$ est de la forme

$$x = ay$$

avec $a \in \mathbb{K}^*$ et transforme $x \mapsto x^2$ en la forme $y \mapsto a^2 y^2$, mais jamais en une forme « kx^2 » avec k non carré. Nous avons établi le

Lemme 6.20. *Soient $\mathbb{K}$ un corps fini de caractéritique différente de deux et δ un élément non carré de $\mathbb{K}$. Alors à équivalence près il existe exactement deux formes quadratiques non nulles sur $\mathbb{K}$:*

i. $q(x) = x^2$

ii. $q(x) = \delta x^2$

Considérons maintenant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension deux et une forme quadratique non dégénérée q sur E (toujours le même corps fini $\mathbb{K}$). Nous savons que E admet une base q-orthogonale (e_1, e_2). Dans cette base, q s'écrit

$$q(u) = ax^2 + by^2$$

où a et b sont des éléments non nuls de $\mathbb{K}$. Le lemme qui suit garantit l'existence d'un vecteur u vérifiant $q(u) = 1$.

Lemme 6.21. *Soient $\mathbb{K}$ un corps fini de caractéritique différente de deux et a, b des éléments non nuls de $\mathbb{K}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ tel que*

$$ax^2 + by^2 = 1$$

Démonstration. La preuve n'a rien de géométrique : nous allons utiliser un argument combinatoire, comme c'est fréquemment le cas sur les corps finis. Notons D l'ensemble des carrés de $\mathbb{K}$. Nous savons que les applications du type

$$k \longmapsto \lambda k + \mu$$

où λ et μ sont fixés dans $\mathbb{K}^*$ et $\mathbb{K}$, respectivement, sont des bijections de $\mathbb{K}$. En particulier

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & k & \longmapsto & 1 - ak \end{array}$$

est bijective et donc

$$\operatorname{card} \{1 - ax^2 ; x \in \mathbb{K}\} = \operatorname{card} f(D) = \operatorname{card} D = \frac{q+1}{2}$$

De même grâce à la bijection $k \mapsto bk$, on montre que

$$\operatorname{card} \{bx^2 ; x \in \mathbb{K}\} = \operatorname{card} D = \frac{q+1}{2}$$

La somme de ces deux cardinaux dépassant q, ces deux ensembles ne peuvent être disjoints, ainsi il existe $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $1 - ax^2 = by^2$. □

D'après ce lemme il existe $u \in E$ tel que $q(u) = 1$. De plus, q étant non dégénérée, $\varphi(u, \bullet)$ n'est pas la forme linéaire nulle, et donc son noyau est de dimension 1. Ceci implique qu'il existe un vecteur v non nul q-orthogonal à u. Ce vecteur ne peut pas être colinéaire à u, par conséquent (u, v) est une base. La matrice de q dans cette base est de la forme

$$\operatorname*{mat}_{(u,v)} q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Si k est un carré $k = \gamma^2$, q s'écrit

$$q(w) = x^2 + (\gamma y)^2$$

et donc est équivalente à la forme $w \mapsto x^2 + y^2$.

En revanche, si k n'est pas un carré, alors k s'écrit $k = \delta \ell^2$ avec $\ell \neq 0$ et q s'écrit

$$q(w) = x^2 + \delta (\ell y)^2$$

et donc est équivalente à la forme $w \mapsto x^2 + \delta y^2$. Résumons :

Lemme 6.22. *Soient $\mathbb{K}$ un corps fini de caractéritique différente de deux, δ un élément non carré de $\mathbb{K}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension deux. Alors à équivalence près il existe exactement deux formes quadratiques non dégénérées sur E :*

i. $q(w) = x^2 + y^2$

ii. $q(w) = x^2 + \delta y^2$

Démonstration. Nous avons vu que toute forme quadratique sur E est équivalente à l'une des formes (i) ou (ii). Il ne reste donc plus qu'à prouver que ces deux dernières ne sont pas équivalentes. Si tel était le cas il existerait $P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$ telle que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P$$

et en prenant le déterminant on aboutirait à

$$\delta = (\det P)^2$$

alors que δ n'est pas un carré ! □

Exercice 6.1. A quelle classe d'équivalence appartient la forme

$$q(w) = \alpha x^2 + \beta y^2$$

si α et β sont des non carrés ?

Nous en savons assez pour énoncer le théorème de classification :

Théorème 6.23. *Réduction sur un corps fini. Soient $\mathbb{K}$ un corps fini de caractéritique différente de deux, δ un élément non carré de $\mathbb{K}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors à équivalence près il existe exactement deux formes quadratiques non dégénérées sur E :*

i. $q(w) = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2$

ii. $q(w) = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \delta x_n^2$

Démonstration.

1. Pour montrer que les formes (i) et (ii) ne sont pas équivalentes on utilise le déterminant, comme dans le cas où E est de dimension 2.

2. Montrons que toute forme quadratique non dégénérée sur E est équivalente soit à (i), soit à (ii), par récurrence sur n, la dimension de E. On sait que la propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. On suppose le résultat vrai pour les espaces de dimension $n - 1$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n et $q \in \mathcal{Q}(E)$ non dégénérée. Nous savons que (E, q) possède une base q-orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$. Dans cette base la matrice de q est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

Le cas $n = 2$ appliqué à la restriction de q sur le sous-espace $\mathrm{vect}\langle e_1, e_2\rangle$ établit l'existence d'une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_3, \ldots, e_n)$ dans laquelle la matrice de q est

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \alpha & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \{1, \delta\}$. L'hypothèse de récurrence appliquée à la restriction de q sur le sous-espace $\mathrm{vect}\langle \varepsilon_2, e_3, \ldots, e_n\rangle$ garantit l'existence d'une base $(\varepsilon_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ dans laquelle la matrice de q est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \beta \end{pmatrix}$$

avec $\beta \in \{1, \delta\}$. □

6.6 Coréduction de deux formes quadratiques

Lorsque l'on travaille avec une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ on a parfois besoin de trouver une réduction de q sur une base orthonormée (pour la structure euclidienne). C'est le cas par exemple lorsque l'on étudie une courbe de degré deux dans $\mathbb{R}^2$: on cherche une base orthonormée ou l'équation se simplifie (pour prendre la forme bien connue par les lycéens appelée « équation réduite »). Nous posons donc ici le problème de la co-réduction de deux formes quadratiques.

Théorème 6.24. *Soient E un espace euclidien de dimension n et φ une forme bilinéaire symétrique sur E. On note ψ le produit scalaire sur E. Alors il existe une base de E qui est à la fois ψ-orthonormée et φ-orthogonale.*

Démonstration. Il suffit de trouver une base orthogonale pour les deux formes. La preuve de ce résultat se lit en fait dans la démonstration algébrique (matricielle) du cas réel du théorème 6.2 : c'est le théorème spectral (relire la fin du paragraphe 6.1). Soient n la dimension de E, e une base ψ-orthonormale de E et A la matrice de φ dans e. Nous savons que A est symétrique, par conséquent il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}\,AP$ soit diagonale. Soit ε la base de E définie par

$$\operatorname*{mat}_e \varepsilon = P$$

Etant donné l'égalité $P^{-1} = {}^tP$, la matrice $P^{-1}\,AP$ est la matrice de φ dans la base ε. Nous avons donc réduit φ. Le fait que la base ε soit ψ-orthonormée résulte du fait que e est elle-même ψ-orthonormée et que la matrice de passage de e vers ε est orthogonale. □

Remarque 6.25. On notera que $\varphi(x)$ se calcule matriciellement grâce à la formule

$$\varphi(x) = {}^tXAX$$

et on reconnaît dans ${}^tXAX$ le produit scalaire de x par le vecteur définie par AX dans la base e. Ainsi l'écriture matricielle de φ lie cette dernière à un endomorphisme $f_{\varphi,e}$ par l'dentité

$$\varphi(x) = \langle x, f_{\varphi,e}(x)\rangle$$

Cet endomorphisme est par construction ψ-auto-adjoint, et donc diagonalisable sur une base ψ-orthonormé : c'est sa diagonalisation qui fournit la base ε cherchée.

En général on ne peut pas toujours co-réduire deux formes quadratiques données. Dans ce qui suit nous donnons une condition nécessaire et suffisante lorsque l'une des deux formes est non dégénérée.

Théorème 6.26. *Soient E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base (e_i), r et s deux formes quadratiques sur E et R et S les matrices respectives de r et s dans (e_i). On suppose r non dégérénére. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. Il existe une base de E à la fois r-orthogonale et s-orthogonale.

ii. La matrice $R^{-1}S$ est diagnonalisable.

Démonstration.

1. $i \Rightarrow ii$. On suppose i. Il existe alors $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tel que $P^t\,RP$ et $P^t\,SP$ soient diagonales. On note D_1 et D_2 ces deux matrices, respectivement. D'après les hypothèses, D_1 est inversible et

$$D_1^{-1}\,D_2 = P^{-1}\,R^{-1}\,(P^t)^{-1}\,P^t\,SP = P^{-1}(R^{-1}\,S)\,P$$

ce qui prouve que $R^{-1}S$ est diagonalisable puisque $D_1^{-1}D_2$ est une diagonale.

2. $ii \Rightarrow i$. On suppose ii. On définit les endomorphismes $\rho, \sigma \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\operatorname*{mat}_e \rho = R$$

et

$$\operatorname*{mat}_e \sigma = S$$

D'après l'hypothèse, ρ est inversible. Soient λ une valeur propre de $\rho^{-1}\sigma$ et x un vecteur propre associé à λ. Notons X la colonne des coordonnées de x dans (e_i). De

$$R^{-1}SX = \lambda X$$

on déduit

$$SX = \lambda RX$$

d'où

$$X^t\,SX = \lambda X^t\,RX$$

c'est à dire

$$r(x) = \lambda s(x)$$

Ceci prouve que les formes r et s (et donc leurs formes polaires associées) sont proportionnelles sur chaque sous-espace propre de $\rho^{-1}\sigma$. Par conséquent, si une base propre de $\rho^{-1}\sigma$ est r-orthogonale, alors elle est s-orthogonale.

Montrons que si x et y sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes λ et μ, alors $r(x, y) = 0$ (on note r la forme polaire de r). Tout d'abord on a $SX = \lambda RX$ et $SY = \mu RY$, d'où

$$\begin{aligned} r(x, y) &= X^t RY \\ &= \frac{1}{\lambda}(\lambda RX)^t Y \\ &= \frac{1}{\lambda}(SX)^t Y \\ &= \frac{1}{\lambda} X^t SY \\ &= \frac{\mu}{\lambda} X^t RY \\ &= \frac{\mu}{\lambda} r(x, y) \end{aligned}$$

On en déduit la nullité de $r(x, y)$ puisque $\frac{\mu}{\lambda} \neq 1$. Nous venons de prouver que les sous-espaces propres de $\rho^{-1}\sigma$ sont deux à deux r-orthogonaux. Pour terminer il suffit de construire une base r-orthogonale dans chaque sous-espace propre (il suffit de considérer la restriction de r à chaque sous-espace propre). □

Chapitre 7
Structure pseudo-euclidienne

7.1 Orthogonalité

On rappelle la

Définition 7.1. *Un espace pseudo-euclidien est un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique.*

L'espace pseudo-euclidien défini par E et la forme quadratique q est noté (E, q), ou (E, φ), ou encore (E, φ, q), si φ désigne la forme polaire de q.

Soit (E, φ, q) un espace pseudo-euclidien. Soient $u, v \in E$.

- On dit que u est isotrope si $q(u) = 0$.
- On dit que u et v sont orthogonaux si $\varphi(u, v) = 0$.

Définition 7.2. *Soient (E, φ) un espace pseudo-euclidien et A une partie de E. L'orthogonal de A est le sous-ensemble*

$$A^{\perp} = \{x \in E ; \varphi(x, a) = 0\}$$

On a clairement la

Proposition 7.3. *Soient (E, φ) un espace pseudo-euclidien, A, B des parties de E et F, G des sous-espoaces vectoriels de E. Alors*

1. *L'orthogonal de A est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *$\{0\}^{\perp} = E$.*
3. *Le noyau de φ est l'orthogonal de E, ce qui justifie la notation $E^{\perp}$ de la défintion 4.6.*
4. *Si $A \subset B$ alors $A^{\perp} \supset B^{\perp}$. En particulier $E^{\perp} \subset A^{\perp}$.*
5. *$(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.*
6. *$F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.*

Remarque 7.4. L'inclusion de l'item 6 peut être stricte. Prendre par exemple $E = \mathbb{R}^2$ muni de la forme $q(x) = x_1^2$, $F = \mathrm{vect}\big\langle (1, 0)\big\rangle$ et $G = \mathrm{vect}\big\langle (1, 1)\big\rangle$. Alors F et G ont le même orthogonal, à savoir la droite $\{x = 0\}$. D'un autre côté $F \cap G = \{0\}$. Ainsi, dans cet exemple, le membre de gauche est une droite vectorielle tandis que le membre de droite est $\mathbb{R}^2$. Nous verrons plus loin que si q est non dégénérée il y a égalité.

On rappelle que j_{φ} est l'application linéaire de E vers E^* qui à chaque $x \in E$ associe la forme $\varphi(x, \bullet)$. Cette application permet de faire le lien entre l'orthogonal et l'annulateur d'une partie de E.

Lemme 7.5. *Soient (E, φ) un espace pseudo-euclidien de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. Alors modulo l'identification $E = E^{**}$, nous avons*

$$F^{\perp} = (j_{\varphi}(F))^0$$

Démonstration. Modulo l'identification $E = E^{**}$,

$$\begin{aligned}(j_\varphi(F))^0 &= \{x \in E; \forall f \in F, j_\varphi(f)(x) = 0\}\\ &= \{x \in E; \forall f \in F, \varphi(x, f) = 0\}\\ &= F^\perp\end{aligned}$$

□

Ce lemme est trivial quand on a bien compris l'identification entre E et son bidual.

Nous savons que dans un espace euclidien E nous avons la somme directe

$$E = F \oplus F^\perp$$

pour chaque sous-espace F de E. Dans les espaces pseudo-euclidiens les choses sont un peu plus compliquées.

Proposition 7.6. *Soient* (E, φ) *un espace pseudo-euclidien et* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Alors*

1. $\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim (F \cap E^\perp)$
2. $F^{\perp\perp} = F + E^\perp$

Démonstration.

1. Nous allons nous ramener à la proposition 1.8 grâce à j_φ. D'après cette dernière

   $$\dim E = \dim j_\varphi(F) + \dim (j_\varphi(F))^0$$

   c'est à dire

   $$\dim E = \dim j_\varphi(F) + \dim F^\perp$$

   Pour en savoir plus sur $\dim j_\varphi(F)$ il suffit d'appliquer le théorème du rang à la restriction de j_φ à F :

   $$j_\varphi|F : F \longrightarrow E^*$$

   on obtient

   $$\dim j_\varphi(F) = \dim F - \dim \ker j_\varphi|F$$

   où

   $$\ker j_\varphi|F = \ker j_\varphi \cap F = E^\perp \cap F$$

   d'où le résultat.

2. Nous allons montrer que $F + E^\perp \subset F^{\perp\perp}$ et que $\dim(F + E^\perp) = \dim F^{\perp\perp}$.

   - Si $f \in F$, clairement $f \in F^{\perp\perp}$. D'un autre côté, si $x \in E^\perp$, x est orthogonal à tout le monde, et donc il appartient à l'orthogonal de n'importe quelle partie de E, en particulier $x \in F^{\perp\perp}$. On en déduit l'inclusion.
   - En remplaçant F par $F^\perp$ dans la formule de l'item 1 on obtient

     $$\dim E = \dim F^\perp + \dim F^{\perp\perp} - \dim (F^\perp \cap E^\perp)$$

     c'est à dire

     $$\dim E = \dim F^\perp + \dim F^{\perp\perp} - \dim (E^\perp)$$

     qui combinée à la formule

     $$\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim (F \cap E^\perp)$$

     donne

     $$\dim F^{\perp\perp} - \dim (E^\perp) = \dim F - \dim (F \cap E^\perp)$$

     c'est à dire

     $$\dim F^{\perp\perp} = \dim F + \dim E^\perp - \dim (F \cap E^\perp)$$

Par ailleurs

$$\dim(F+E^{\perp}) = \dim F + \dim E^{\perp} - \dim(F \cap E^{\perp})$$

d'où l'égalité. □

Si φ est non dégénérée, $E^{\perp} = \{0\}$ et on retrouve des résultats connus dans les espaces euclidiens :

Proposition 7.7. *Soient (E, φ) un espace pseudo-euclidien non dégénérée et F un sous-espace vectoriel de E. Alors*

1. $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp}$
2. $F^{\perp\perp} = F$

Malheureusement, l'égalité $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp}$ n'implique pas que E soit somme directe de F avec son orthogonal. Soient en effet v un élément isotrope non nul de E et V la droite vectorielle engendrée par v. Dans ce cas $V \cap V^{\perp}$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (il y a v dedans) et nous n'avons pas la somme directe...

Exercice 7.1. Donner un exemple où q est une forme quadratique non dégénére sur $\mathbb{R}^3$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathbb{R}^3$ ne soit pas somme directe de F avec son orthogonal.

Remarque 7.8. Soient (E, q) un espace pseudo-euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F \cap F^{\perp} \subset \mathcal{I}(q)$.

Remarque 7.9. L'item 6 de la proposition 7.3 « $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$ » devient une égalité lorsque q est non dégénérée. En effet $F^{\perp} + G^{\perp} = (F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp\perp} = (F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp})^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$, d'après l'item 5.

7.2 Sous-espaces isotropes

Nous avons vu que si E n'est pas somme directe de F et $F^{\perp}$ c'est uniquement à cause de l'intersection de F avec son orthogonal. Ceci motive la définition :

Définition 7.10. *Soient (E, q) un espace pseudo-euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est un sous-espace isotrope de E si $F \cap F^{\perp} \neq \{0\}$.*

On a clairement la

Proposition 7.11. *Soient (E, q) un espace pseudo-euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Nous avons les équivalences :*

i. *F est isotrope.*

ii. $F \cap F^{\perp} \neq \{0\}$.

iii. *$q_{|F}$ est dégénérée.*

Remarque 7.12. Nous rappelons que d'après la définition 4.9, la forme nulle sur $\{0\}$ est non dégénérée. Si nous avions pris le partie contraire, nous aurions dû formuler l'assertion (iii) comme ceci : « F n'est pas trivial et $q_{|F}$ est dégérénére ». C'est juste une précision sur le langage choisi et cela n'aura aucune incidence sur la suite.

Proposition 7.13. *Soient (E, q) un espace pseudo-euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est isotrope alors $F \cap \mathcal{I}(q) \neq \{0\}$. La réciproque est fausse.*

Démonstration. Si F est isotrope alors $F \cap F^{\perp} \neq \{0\}$, or $F \cap F^{\perp} \subset \mathcal{I}(q)$, d'où le résultat. Pour se convaincre de la fausseté de la réciproque il suffit de considérer un espace pseudo-euclidien non dégénéré (A, r) possédant des vecteurs isotropes non triviaux. Dans ce cas A n'est pas isotrope alors que $A \cap \mathcal{I}(r) \neq \{0\}$. □

Exemple 7.14. Il y a des contre-exemples moins triviaux pour la réciproque : prendre $E=\mathbb{R}^3$ avec $q(x)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$ et $F=\{x_1=0\}$. Le cône d'isotropie est

$$\mathcal{I}(q)=\{x_1^2+x_2^2=x_3^2\}$$

(c'est un vrai cône). La trace de ce dernier sur F est une paire de droites :

$$F\cap\mathcal{I}(q)=\{x_1=0 \text{ et } x_2=x_3\}\cup\{x_1=0 \text{ et } x_2+x_3=0\}$$

et pourtant F est non isotrope. En effet, munissons F du système de coordonnées (x_2, x_3). Dans ce système de coordonnées, la restriction de q s'écrit $(x_2, x_3)\mapsto x_2^2-x_3^2$; c'est non dégénéré. Une autre manière de le voir : l'orthogonal de F est l'axe des x_1, et donc $F\cap F^{\perp}=\{0\}$.

L'existence de sous-espaces isotropes dépend de l'existence de vecteurs isotropes :

Proposition 7.15. *Un espace pseudo-euclidien possède des sous-espaces isotropes si et seulement si il possède des vecteurs isotropes non nuls.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{I}(\varphi)\neq\{0\}$. Soit alors $v\in\mathcal{I}(\varphi)\backslash\{0\}$. Nous savons qu'alors $\operatorname{vect}\langle v\rangle$ est un sous-espace isotrope. La réciproque découle de la proposition précédente. □

Nous savons grâce à la proposition 7.7 que dans un espace $(E,\, q)$ non dégénérée, un sous-espace F vérifie la propriété de la somme directe ($E=F\oplus F^{\perp}$) si et seulement ce sous espace n'est pas isotrope. En fait cette équivalence demeure vraie même si q est dégénérée :

Théorème 7.16. *Soient $(E,\,\varphi)$ un espace pseudo-euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $E=F\oplus F^{\perp}$ si et seulement si F est non isotrope.*

Démonstration. Si F vérifie la propriété de la somme directe alors évidemment il est non isotrope. Réciproquement, supposons que F est non isotrope, c'est à dire $F\cap F^{\perp}=\{0\}$. Dans ce cas $F\cap E^{\perp}=\{0\}$ car $E^{\perp}\subset F^{\perp}$, et par conséquent $\dim E=\dim F+\dim F^{\perp}-\dim\,(F\cap E^{\perp})=\dim F+\dim F^{\perp}-0$, d'où le résultat. □

7.3 Sous-espaces totalement isotropes

Définition 7.17. *Soient $(E,\, q)$ un espace pseudo-euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est un sous-espace totalement isotrope de E si tous les éléments de F sont isotropes, c'est à dire si $q_{|F}$ est nulle.*

Il est clair alors que pour tout $x,\, y\in F$, $\varphi(x,\, y)=0$ (ici φ désigne la forme polaire de q). Il est clair aussi que si F est totalement isotrope et non trivial alors F est isotrope. Il existe d'autres façons de caractériser les sous-espaces totalement isotropes :

Proposition 7.18. *Soient (E,q) un espace pseudo-euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Nous avons les équivalences :*

i. *F est totalement isotrope.*

ii. *q est nulle sur F.*

iii. *La forme polaire de q est nulle sur $F\times F$.*

iv. *$F\subset\mathcal{I}(q)$.*

v. *$F\subset F^{\perp}$.*

Démonstration. Les items (i), (ii), (iii) et (iv) sont clairement équivalents. Supposons que ces assertions sont vraies et soit $x\in F$. Montrons que $x\perp F$. Soit $y\in F$. D'après (iii), $\varphi(x,y)=0$, d'où (v). Réciproquement, on suppose (v). Soit $x\in F$. Alors $x\in F^{\perp}$ et donc $q(x)=0$. Ainsi q est nulle sur F. □

Exemple 7.19. Le noyau de q est clairement un sous-espace totalement isotrope.

Exemple 7.20. Prenons $E=\mathbb{R}^3$ et $q(x)=x_1^2-x_2^2$. Le noyau est la droite $\{x_1=x_2=0\}$. Le cône d'isotropie est la réunion des plans $\{x_1-x_2=0\}$ et $\{x_1+x_2=0\}$. Chacun de ces plans est un sous-espace totalement isotrope.

L'existence de sous-espaces totalement isotropes non triviaux dépend de la non trivialité du cône d'isotropie :

Proposition 7.21. *Soit (E,φ) un espace pseudo-euclidien. L'espace (E,φ) possède des sous-espaces totalement isotropes non réduits à $\{0\}$ si et seulement si il possède des vecteurs isotropes non nuls.*

La preuve est triviale. La proposition 7.7 a pour conséquence la

Proposition 7.22. *Soient (E,q) un espace pseudo-euclidien non dégénéré et F un sous-espace totalement isotrope de (E,q). Alors*

$$2\dim F\leqslant\dim E$$

Démonstration. De $F\subset F^\perp$ on déduit $\dim F\leqslant\dim F^\perp$, mais q étant non dégénérée, $\dim F^\perp=\dim E-\dim F$, d'où le résultat. □

Théorème 7.23. *Dans un espace pseudo-euclidien non dégénéré tous les sous-espace totalement isotropes maximaux pour l'inclusion ont la même dimension ν. De plus*

$$2\nu\leqslant\dim E$$

Démonstration. Soient F et G des sous-espaces de (E,φ,q) totalement isotropes maximaux. Soient F_1 et G_1 des supplémentaires de $F\cap G$ dans F et G, respectivement :

$$\begin{cases} F=(F\cap G)\oplus F_1\\ G=(F\cap G)\oplus G_1\end{cases}$$

Montrons par l'absurde que $G_1\cap F_1^\perp=\{0\}$ en supposant que $x\in(G_1\cap F_1^\perp)\backslash\{0\}$.

1. Tout d'abord $x\notin F$. En effet, si $x\in F$ alors $x\in F\cap G$, or $(F\cap G)\cap G_1=\{0\}$, d'où le résultat.
2. Ensuite $x\in F^\perp$. En effet, si $y\in F$, on décompose y en
   $$y=y_1+y_2$$
   avec $y_1\in F\cap G$ et $y_2\in F_1$. On a alors $\varphi(x,y)=\varphi(x,y_1)+\varphi(x,y_2)$. Or d'un côté, x et y_1 sont tous deux dans G qui est totalement isotrope, et de l'autre côté, $x\in F_1^\perp$. Il s'ensuit que $\varphi(x,y)=0$, d'où le résultat.
3. Enfin, $F\oplus\mathrm{vect}\langle x\rangle$ est totalement isotrope. En effet, si $u\in F\oplus\mathrm{vect}\langle x\rangle$ alors il existe $f\in F$ et $k\in\mathbb{K}$ tels que $u=f+kx$. Ainsi $q(u)=q(f)+2k\varphi(f,x)+k^2q(x)$. Puisque F et G sont totalement isotropes, les termes $q(f)$ et $q(x)$ sont nuls. De plus, puisque $x\perp F$, le terme $\varphi(f,x)$ est nul lui aussi. Il s'ensuit que $q(u)=0$, d'où le résultat.

Mais cette dernière assertion est absurde étant donnée la maximalité de F ($x\notin F$), par conséquent

$$G_1\cap F_1^\perp=\{0\}$$

On en déduit $\dim G_1+\dim F_1^\perp\leqslant\dim E$, et en tenant compte de l'égalité $\dim F_1^\perp=\dim E-\dim F_1$,

$$\dim G_1\leqslant\dim F_1$$

Un raisonnement symétrique aboutit à

$$\dim F_1\leqslant\dim G_1$$

d'où les égalités $\dim F_1=\dim G_1$ et $\dim F=\dim G$. L'inégalité $2\nu\leqslant\dim E$ est une redite de la proposition précédente. □

Remarque 7.24. A la fin de cette démonstration nous utilisons l'égalité $\dim F_1^\perp = \dim E - \dim F_1$ qui est garantie par le fait que q est non dégénérée.

Exercice 7.2. Trouver l'erreur dans cette fausse démonstration du théorème précédent : « Soient $(e_1, ..., e_p)$ et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q)$ des bases de F et G respectivement. Il est possible de compléter $(e_1, ..., e_p)$ en une base $(e_1, ..., e_n)$ q-orthogonale de E. On complète de manière analogue la base de F en $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. La matrice A de q dans (e_i) est une diagonale. Les p premiers coefficients de cette diagonale sont nuls, tandis que les autres sont non nuls : en effet, si le coefficient (i, i) était nul, avec $i > p$, le sous espace $\text{vect}\langle e_1, ..., e_n, e_i\rangle = F \oplus \text{vect}\langle e_i\rangle$ serait totalement isotrope, ce qui contredit la maximalité de F. De la même manière, la matrice B de q dans (ε_i) est une diagonale contenant exactement q coefficients nuls. L'égalité des rangs $\text{rg}\, A = \text{rg}\, B$ se traduit par $p = q$. »

Définition 7.25. *Soit (E, q) un espace pseudo-euclidien non dégénéré. L'indice de q est la dimension des sous-espace totalement isotropes de E maximaux pour l'inclusion. On le note $\nu(q)$.*

Remarque 7.26. L'inégalité

$$2\nu(q) \leqslant \dim E$$

est optimale. Il existe en effet des cas où il y a égalité. Prenons la forme q sur $\mathbb{R}^{2n}$ définie par

$$q(x) = x_1^2 + ... + x_n^2 - x_{n+1}^2 - ... - x_{2n}^2$$

et notons (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$. Les vecteurs $e_1 + e_{n+1}, ..., e_n + e_{2n}$ sont linéairement indépendants, isotropes et deux à deux orthogonaux. Ils engendrent donc un sous-espace totalement isotrope de dimension n. L'inégalité $2\nu(q) \leqslant \dim E$ montre que ce sous-espace est totalement isotrope maximal. Ici nous avons bien l'égalité $2\nu(q) = \dim E$.

Exercice 7.3. Montrer que si $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{sign}(q) = (p, n-p)$, alors $\nu(q) = \min(p, n-p)$.

Lors de la prochaine mise à jour nous parlerons des inégalités de Schwarz et de Minkowski.

7.4 Adjoint

Soient (E, φ, q) un espace pseudo-euclidien non dégénéré et $f \in \mathcal{L}(E)$. Nous allons chercher un endomorphisme f^* vérifiant

$$\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f^*(y))$$

pour tous $x, y \in E$. Ceci généralise la notion d'endomorphisme adjoint connue dans les espaces euclidiens. Nous fixerons pour cela une base (e_i) dans E et nous noterons F, Q, X et Y les matrices respectives de f, q, x et y dans cette base. Ainsi

$$\begin{aligned}\varphi(f(x), y) &= (FX)^t Q Y \\ &= X^t F^t Q Y \\ &= X^t Q F^* Y\end{aligned}$$

à condition de poser

$$F^* = Q^{-1} F^t Q$$

On définit alors l'endomorphisme f^* par

$$\operatorname*{mat}_e f^* = Q^{-1} F^t Q$$

Celui-ci vérifie bien l'égalité demandée. Nous venons de prouver la

Proposition 7.27. *Soient (E, φ) un espace pseudo-euclidien non dégénéré et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe un unique endomorphisme $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x, y \in E$,*

$$\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f^*(y))$$

Cette proposition justifie la

Définition 7.28. *Soient $(E,\ q,\ \varphi)$ un espace pseudo-euclidien non dégénéré et $f\in\mathcal{L}(E)$. L'adjoint de f est l'unique endomorphisme $f^*\in\mathcal{L}(E)$ vérifiant $\varphi(f(x),\ y)=\varphi(x,\ f^*(y))$ pour tous $x,y\in E$. Sa matrice dans une base e est*

$$\underset{e}{\text{mat}}\, f^* = \left(\underset{e}{\text{mat}}\, \varphi\right)^{-1} \left(\underset{e}{\text{mat}}\, f\right)^t \left(\underset{e}{\text{mat}}\, \varphi\right)$$

Notons que si φ est un produit scalaire, on retrouve la notion classique d'adjoint.

Exemple 7.29. On pose $E=\mathbb{R}^2$ et $q(x)=x_1^2-x_2^2$. Si la matrice de f dans la base canonique est $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la matrice de f^* est $\begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$.

On laisse au lecteur le soin de montrer la

Proposition 7.30. *Soient (E,φ) un espace pseudo-euclidien non dégénérée et $f\in\mathcal{L}(E)$. Alors*

1. $f^{**}=f$
2. $\mathrm{id}^*=\mathrm{id}$
3. $(f+g)^*=f^*+g^*$
4. $(\lambda f)^*=\lambda f^*$
5. $(f\circ g)^*=g^*\circ f^*$
6. $\mathrm{rg}\, f^*=\mathrm{rg}\, f$
7. $\det f^*=\det f$
8. $(\mathrm{Im}\, f)^\perp=\ker f^*$
9. $(\ker f)^\perp=\mathrm{Im}\, f^*$

7.5 Groupe orthogonal

Il est naturel de s'intéresser aux automorphismes de E préservant le produit φ. Nous avons déjà étudié ces transformations dans le cas d'un produit scalaire. Nous nous intéressons ici au cas où φ est non dégénérée.

Définition 7.31. *Soient (E,φ,q) un espace pseudo-euclidien non dégénéré et $f\in\mathcal{L}(E)$. On dit que f est orthogonal si pour tout $x,y\in E$, $\varphi(f(x),f(y))=\varphi(x,y)$. On note $\mathcal{O}(q)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.*

Remarque 7.32. Si f est orthogonal alors f est bijectif. Si φ est dégénérée on dit que f est orthogonal si c'est une bijection préservant le produit φ.

Les propositions qui suivent ne posent aucune difficulté :

Proposition 7.33. *Soient $(E,\ \varphi,\ q)$ un espace pseudo-euclidien non dégénéré et $f\in\mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. *f est orthogonal.*

ii. $\forall x,y\in E$, $\varphi(f(x),f(y))=\varphi(x,y)$.

iii. $\forall x\in E$, $q(f(x))=q(x)$.

iv. $f^*\circ f=\mathrm{id}_E$.

v. $f\circ f^*=\mathrm{id}_E$.

Proposition 7.34. *Soit $(E,\ \varphi,\ q)$ un espace pseudo-euclidien non dégénéré. Alors $\mathcal{O}(q)$ est un sous-groupe du groupe linéaire* $\mathrm{GL}(E)$.

Comme dans le cas euclidien, $\mathcal{O}(q)$ s'appelle groupe orthogonal de (E, q).

Proposition 7.35. *Soit (E, φ, q) un espace pseudo-euclidien non dégénéré. Si f est un endomorphisme orthogonal alors son déterminant est ± 1.*

Démonstration. De $f^* \circ f = \mathrm{id}_E$ on déduit $\det f^* \det f = 1$, c'est à dire $(\det f)^2 = 1$, d'où le résultat. □

La proposition qui suit traduit l'othogonalité en termes de matrices. C'est cette caractérisation qui est le plus souvent utilisée pour calculer le groupe orthogonal.

Proposition 7.36. *Soient (E, φ, q) un espace pseudo-euclidien non dégénéré, (e_i) une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note Q et F les matrices respectives de q et f dans (e_i). Alors f est orthogonal si et seulement si $F^t Q F = Q$.*

Démonstration. On sait que $f \in \mathcal{O}(q)$ si et seulement si $f^* \circ f = \mathrm{id}_E$. Il se trouve que la matrice de f^* dans la base (e_i) est $Q^{-1}F^t \; Q$ et donc l'égalité précédente équivaut à $Q^{-1}F^t Q F = I$, c'est à dire $F^t Q F = Q$. □

Exemple 7.37. Dans la théorie de la relativité restreinte, le mouvement d'une particule se déplaçant le long d'une droite est représenté dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^2_1$. Il s'agit du plan $\mathbb{R}^2$ munit de la forme quadratique $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. Dans ce modèle x_1 représente la position de la particule et $x_2 = ct$, le paramètre « temps » (au coefficient c près). Le coefficient c est la vitesse de la lumière. On postule alors que les changements de référentiels galiléens sont les endomorphismes q-orthogonaux. L'étude des éléments de $\mathcal{O}(q)$ est un bon exercice ; on peut la lire dans [3]. Les éléments de ce groupe sont caractérisés par leur matrice dans la base canonique. On en trouve quatre types

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & -\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ -\operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ -\operatorname{sh}\psi & -\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$$

où ψ est un nombre réel. Ce groupe orthogonal s'appelle groupe de Lorentz. Si la particule se déplace dans l'espace physique, on repère sa position avec trois coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) et on travaille dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^4_1$, c'est à dire $\mathbb{R}^4$ muni de la forme $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$. Ici $x_4 = ct$ est le paramètre associé au temps.

Parmi les endomorphismes orthogonaux nous distinguerons ceux dont le détérminant est égal à 1 (ils conservent l'orientation). Ils forment clairement un sous-groupe de $\mathcal{O}(q)$.

Définition 7.38. *Soient (E, φ, q) un espace pseudo-euclidien non dégénéré et $f \in \mathcal{O}(q)$. On dit que f est direct si son déterminant est 1. On note $\mathcal{SO}(q)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux directs de (E, q). C'est un sous-groupe de $\mathcal{O}(q)$ appelé groupe spécial orthogonal.*

Chapitre 8

Algorithme de Lagrange et critère de Sylvester

8.1 Algorithme de Lagrange

Nous avons vu deux manières de réduire une forme quadratique : le procédé de la section 6.1 et la méthode de Gauss, section 6.2. Il en existe une troisième : l'algorithme de Lagrange. C'est une généralisation du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soient (E, q) un espace pseudo-euclidien de dimension n et (e_i) une base de E. Pour simplifier les notations nous noterons q la forme bilinéaire symétrique et q la forme quadratique associée. Nous noterons (a_{ij}) la matrice de q dans (e_i). Voici comment on applique l'algorithme de Lagrange au couple (q, e).

1. Si $a_{11} \neq 0$ on obtient une nouvelle base en posant

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_i = -\frac{a_{1i}}{a_{11}} e_1 + e_i \ (i \neq 1) \end{cases}$$

dans laquelle e'_1 est orthogonal aux autres e'_i. En effet,

$$\begin{aligned} q(e'_1, e'_i) &= q(e_1, -\frac{a_{1i}}{a_{11}} e_1 + e_i) \\ &= -\frac{a_{1i}}{a_{11}} q(e_1, e_1) + q(e_1, e_i) \\ &= -\frac{a_{1i}}{a_{11}} a_{11} + a_{1i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ensuite on passe directement à l'étape 5 ci-dessous.

2. Si $a_{11} = 0$ et l'un des autres a_{ii} est non nul, on permute e_1 et le e_i correspondant. Précisément si $a_{i_0 i_0} \neq 0$ on obtient une nouvelle base en posant

$$\begin{cases} e'_1 = e_{i_0} \\ e'_{i_0} = e_1 \\ e'_i = e_i \ (i \neq 1, i_0) \end{cases}$$

Notons (a'_{ij}) la matrice de q dans cette base. Nous avons $a'_{11} \neq 1$ et nous pouvons appliquer l'étape 1 à (q, e') : retour au point 1.

3. Si tous les a_{ii} sont nuls et q n'est pas nulle, l'un des a_{ij} est non nul, disons $a_{12} \neq 0$. On pose alors

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 \\ e'_i = e_i \ (i \neq 1) \end{cases}$$

Notons (a'_{ij}) la matrice de q dans la nouvelle base. On a

$$\begin{aligned} a'_{11} &= q(e'_1, e'_1) \\ &= q(e_1 + e_2, e_1 + e_2) \\ &= q(e_1) + 2\,q(e_1, e_2) + q(e_2) \\ &= 2\,a_{12} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

et nous pouvons appliquer l'étape 1 à (q, e') : retour au point 1.

4. Si q est nulle on arrête le procédé puisque q est réduite : fin.
5. Si on arrive à cette étape c'est qu'on a appliqué l'étape 1, ce qui nous a donné, disons q et une nouvelle base e' . La restriction de q à $E_1 = \text{vect}\langle e'_2, \ldots, e'_n\rangle$ est une forme quadratique sur E_1 et on recommence tout avec la forme $q_{|E_1}$ et la base $(e'_2, \ldots, e'_n)$: retour au point 1.

Cet algorithme modifie la base « courante » selon trois transformations élémentaires. Nous noterons

- L_1 le mouvement élémentaire utilisé à l'étape 1. On l'appelle transformation basique.
- L_2 le mouvement élémentaire utilisé à l'étape 2. On l'appelle première transformation auxiliaire. Il revient à renuméroter les variables.
- L_3 le mouvement élémentaire utilisé à l'étape 3. On l'appelle deuxième transformation auxiliaire. Il revient à poser $y_1 = x_1 - x_2$ et pour les autres i, $y_i = x_i$.

Remarque 8.1. Nous savons que $q(a)$ s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j} 2 a_{ij}\, x_i\, x_j$$

On notera que pour les indices i, j distincts, le coefficient est $2a_{ij}$ et non a_{ij}, car contrairement à ce qui a été décidé à la section 6.2 (méthode de Gauss), ici a_{ij} désigne le coefficient (i, j) de la matrice de q dans la base e ; gare aux erreurs ! Si $a_{11} \neq 0$, la méthode de Gauss consiste à faire la transformation suivante :

$$q(a) = \left(a_{11}\, x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} 2 a_{1i}\, x_1\, x_i \right) + \left(\sum_{i=2}^{n} a_{ii}\, x_i^2 + \sum_{2 \leqslant i < j} 2 a_{ij}\, x_i\, x_j \right)$$

où l'on sépare les monomes contenant x_1 des autres (la notation est plus lourde qu'à la section 6.2). La partie contenant x_1 se transforme ensuite en un carré :

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1^2 + 2 \sum_{i=2}^{n} a_{1i}\, x_1\, x_i &= a_{11} \left(x_1^2 + 2 \sum_{i=2}^{n} x_1 \frac{a_{1i}\, x_i}{a_{11}} \right) \\ &= a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right)^2 + q_1(x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Le reste « $q_1(x_2, \ldots, x_n)$ » est une forme quadratique dans laquelle n'apparaît pas x_1. En rassemblant on obtient

$$q(a) = a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right)^2 + q_2(x_2, \ldots, x_n)$$

Si on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\ y_i = x_i \ (i \neq 1) \end{array} \right. \tag{8.1}$$

on obtient

$$q(a) = y_1^2 + q_3(y_2, \ldots, y_n)$$

Le fait qu'il n'y ait pas de monomes « $y_1\, y_j$ » dans cette expression signifie que le vecteur 1 de la nouvelle base est orthogonal aux autres vecteurs de la base. Mais ceci n'aura pas étonné le lecteur qui a reconnu en (8.1) le changement L_1 de Lagrange ! Ainsi, la transformation L_1 de Lagrange n'est qu'une reformulation du point 1 de la méthode de Gauss !

Il est clair que cet algorithme aboutit toujours à une base q-orthogonale (on peut donc relier n'importe quelle base de E à une base q-orthogonale en un nombre fini de mouvements du type L_1, L_2 et L_3).

Théorème 8.2. *Réduction, cinquième version. Soient $(E,\ q)$ un espace pseudo-euclidien de dimension n et e une base de E. L'algorithme de Lagrange appliqué à (q, e) aboutit au bout d'un nombre fini d'étapes à une base q-orthogonale.*

8.2 Théorème de Jacobi et critère de Sylvester

Nous allons nous intéresser ici au cas où l'algorithme de Lagrange ne procède qu'à des transformations du type L_1.

Supposons que le mouvement L_1 appliqué à (q, e) donne (q, e'). La matrice de passage de e vers e' est alors

$$\underset{e}{\mathrm{mat}}\, e' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ & & 1 & & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Elle est triangulaire supérieure avec que des 1 sur la diagonale : on dit qu'elle est unitriangulaire. Ceux qui connaissent la décomposition « LU » ont déjà rencontré ce type de matrices et savent que le produit de deux matrices unitriangulaires est unitriangulaire. De même, l'inverse d'une matrice unitriangulaire est unitriangulaire.

Définition 8.3. *Une matrice unitriangulaire est une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$, triangulaire supérieure, avec que des 1 sur la diagonale. On note $\mathrm{TS}(n,\ \mathbb{K})$ l'ensemble des matrices unitriangulaires $n \times n$.*

On laisse au lecteur le soin de prouver la

Proposition 8.4. *L'ensemble $\mathrm{TS}(n, \mathbb{K})$ est un sous-groupe du groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$.*

On rappelle que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ des matrices de déterminant 1. Il résulte de tout ceci que si deux bases de E sont reliées par un nombre fini de mouvements de type L_1, la matrice de passage est unitriangulaire. Cette situation est riche en informations.

Définition 8.5. *Soient $(E,\ q)$ un espace pseudo-euclidien de dimension n et e une base de E. On dit que $(q,\ e)$ appartient au cas régulier si l'algorithme de Lagrange appliqué à $(q,\ e)$ ne donne que des mouvements L_1.*

Dans un cas régulier il est possible qu'au bout d'un nombre r d'étapes, la forme quadratique restante soit nulle : dans ce cas la forme quadratique considérée est de rang r.

La première information donnée par le cas régulier se trouve dans les mineurs principaux de la matrice de q.

Définition 8.6. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \{1, ..., n\}$. On note $A = (a_{ij})$.*

1. *La sous-matrice principale d'ordre k de A est la matrice $k \times k$ dont le coefficient (i, j) est a_{ij}. On la note A_k.*
2. *Le mineur principal d'ordre k de A est le déterminant de A_k.*

Les mineurs principaux de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$$

sont

$$\begin{vmatrix} a \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

Supposons maintenant que e et e' sont des bases de (E, q) telles que $\operatorname{mat}_e e'$ soit unitriangulaire. On a alors

$$\operatorname{vect}\langle e_1, \ldots, e_k \rangle = \operatorname{vect}\langle e_1', \ldots, e_k' \rangle$$

pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. Notons

- Q la matrice de q dans e,
- Q' la matrice de q dans e',
- C la matrice $\operatorname{mat}_e e'$ (matrice de e vers e'),
- $V_k = \operatorname{vect}\langle e_1, \ldots, e_k \rangle = \operatorname{vect}\langle e_1', \ldots, e_k' \rangle$.

On remarque que pour tout k,

$$\begin{cases} C_k = \operatorname*{mat}_{(e_1, \ldots, e_k)} (e_1', \ldots, e_k') \\ q_{|V_k} \in \mathcal{Q}(V_k) \\ \operatorname*{mat}_{(e_1, \ldots, e_k)} q_{|V_k} = Q_k \\ \operatorname*{mat}_{(e_1', \ldots, e_k')} q_{|V_k} = Q_k' \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Q_k' &= \operatorname*{mat}_{(e_1', \ldots, e_k')} q_{|V_k} \\ &= \left(\operatorname*{mat}_{(e_1, \ldots, e_k)} (e_1', \ldots, e_k') \right)^t \left(\operatorname*{mat}_{(e_1, \ldots, e_k)} q_{|V_k} \right) \left(\operatorname*{mat}_{(e_1, \ldots, e_k)} (e_1', \ldots, e_k') \right) \\ &= C_k^t \, Q_k \, C_k \end{aligned}$$

et puisque le déterminant de chaque C_k est 1, on obtient :

$$\det Q_k' = \det Q_k \tag{8.2}$$

Belle invariance !

Le cas régulier nous met exactement dans cette situation : l'algorithme de Lagrange aboutit à une base e' reliée à la base initiale e par une matrice de passage C unitriangulaire. La différence étant qu'ici la matrice Q' de q dans la nouvelle base e' est diagonale :

$$Q' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

L'égalité (8.2) nous dit alors que chaque mineur principal de la matrice Q de q dans la base initiale est

$$\det Q_k = \lambda_1 \ldots \lambda_k$$

Ainsi

$$\begin{cases} \det Q_1 = \lambda_1 \\ \det Q_2 = \lambda_1 \, \lambda_2 = \det Q_1 \, \lambda_2 \\ \det Q_3 = \lambda_1 \, \lambda_2 \, \lambda_3 = \det Q_2 \, \lambda_3 \\ \ldots \\ \det Q_n = \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1} \, \lambda_n = \det Q_{n-1} \, \lambda_n \end{cases}$$

d'où nous allons tirer les λ_i. Si r est le rang de q, nous savons que pour les $i \in \{r+1, ..., n\}$, λ_i est nul. D'autre part on voit par récurrence que les déterminants de $Q_1, ..., Q_r$ sont non nuls et que :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \det Q_1 \\ \lambda_2 = \frac{\det Q_2}{\det Q_1} \\ \dots \\ \lambda_r = \frac{\det Q_r}{\det Q_{r-1}} \end{cases}$$

Nous venons de montrer que si (q, e) appartient au cas régulier, on peut connaître les coefficients λ_i apparaissant dans la réduction de q avant même d'appliquer l'algorithme de Lagrange. Les coefficients λ_i sont donnés par les mineurs principaux de la matrice de q dans e. Nous avons montré au passage que les r premiers mineurs principaux de cette matrice sont non nuls.

Examinons la réciproque : on suppose que q est de rang r et que les r premiers mineurs principaux de la matrice de q dans e sont non nuls.

Puisque $\det Q_1 = a_{11}$, nous avons $a_{11} \neq 0$ et nous appliquons L_1 à (q, e), ce qui donne un couple (q, e'). Nous avons vu que les mineurs principaux de $\mathrm{mat}_e\, q$ et $\mathrm{mat}_{e'}\, q$ sont les mêmes. Ainsi, les scalaires $\det Q'_1$, ..., $\det Q'_k$ sont non nuls (Q' désigne la matrice de q dans e'). Nous savons que Q' ressemble à ceci :

$$Q' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

et donc $\det Q'_2 = a_{11}\, a'_{22}$, ce qui prouve que a'_{22} est non nul. On applique alors le point 5 de l'algorithme de Lagrange : cela consiste à restreindre q à un certain sous-espace. Moralement cela revient à oublier le premier vecteur de la base e'. Ensuite on applique L_1 (on peut puisque a'_{22} est non nul).

Puisque les r premiers mineurs principaux sont non nuls on peut itérer ce qui vient d'être dit en tout r fois. Au bout de r étapes on obtient une base de E dans laquelle la matrice de q est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & \boxed{G} \end{pmatrix}$$

avec chaque λ_i non nul. Le rang de cette matrice étant égal à r, on a forcément un bloc G nul. L'algorithme de Lagrange a donc réduit q avec uniquement des transformations L_1. Résumons :

Théorème 8.7. *(Jacobi) Soient (E, q) un espace pseudo-euclidien et e une base de E. Alors (q, e) appartient au cas régulier de l'algorithme de Lagrange si et seulement si les r premiers mineurs principaux de la matrice de q dans e sont non nuls.*

Le cas échéant, si on note D_1, ..., D_r les r premiers mineurs principaux, l'algorithme de Lagrange transforme la base e en une base e' ou l'expression de q est

$$q(a) = D_1\, x_1^2 + \frac{D_2}{D_1}\, x_2^2 + \dots + \frac{D_r}{D_{r-1}}\, x_r^2$$

Dans le traitement de la réciproque nous avons démontré quelque chose de plus subtil : si on ne connaît pas le rang de q mais que nous savons que les k premiers mineurs principaux sont non nuls, alors on peut appliquer k fois la transformation L_1 au couple (q, e). Bien sûr, ces k opérations n'ont pas forcément réduit q. En revanche, si tous les mineurs principaux sont non nuls, l'opération L_1 réduit la matrice de q en une matrice diagonale : pas besoin de faire appel aux transformations auxilaires (noter que si tous les mineurs principaux sont non nuls, le déterminant est non nul, ce qui signifie que q est non dégénérée).

Le critère de Sylvester est une conséquence immédiate du théorème de Jacobi :

Théorème 8.8. *(Critère de Sylvester) Soient E un espace vectoriel réel de dimension n, e une base de E et q une forme quadratique sur E. Alors q est définie positive si et seulement si les mineurs principaux de la matrice de q dans e sont strictement positifs.*

Démonstration. Supposons pour commencer que tous les mineurs $D_1, \ldots, D_n$ de la matrice de q dans e sont strictement positifs. D'après ce qui précède, il existe une base e' dans laquelle q s'écrit

$$q(a) = D_1\, x_1^2 + \frac{D_2}{D_1}\, x_2^2 + \ldots + \frac{D_n}{D_{n-1}}\, x_n^2$$

Dans cette expression tous les coefficients sont strictement positifs, ce qui prouve que q est définie positive.

Réciproquement, on suppose que q est définie positive. Il existe alors une base e' dans laquelle la matrice de q est la matrice identité. De la relation

$$\left(\operatorname*{mat}_{e} q\right) = \left(\operatorname*{mat}_{e'} e\right)^t \left(\operatorname*{mat}_{e'} q\right) \left(\operatorname*{mat}_{e'} e\right)$$

on déduit

$$D_n = \left|\operatorname*{mat}_{e'} e\right|^2$$

d'où

$$D_n > 0$$

(On aurait pu également faire appel au théorème spectral qui affirme que Q se diagonalise en une matrice D ; la forme q étant définie positive, D est forcément une diagonale de nombres strictement positifs et donc $\det D > 0$, mais nous savons que $\det Q = \det D$.)

Pour les autres mineurs principaux il suffit de restreindre q. On pose

$$V_k = \operatorname{vect}\langle e_1, \ldots, e_k\rangle$$

Il est clair que

$$D_k = \det \operatorname*{mat}_{(e_1, \ldots, e_k)} q_{|V_k}$$

et que $q_{|V_k}$ est une forme quadratique définie positive sur V_k, d'où le résultat. □

Chapitre 9
Application à l'étude des extréma locaux

Nous traiterons cette section lors d'une prochaine mise à jour.

Chapitre 10
Application aux courbes projectives de degré deux

Commençons par quelques rappels. L'espace projectif associé à un espace vectoriel E est l'ensemble $P(E)$ des droites vectorielles de E. Si la dimension de E est n on dit que $P(E)$ est de dimension $n-1$. Un plan projectif par exemple, est l'ensemble des droites vectorielles d'un espace vectoriel de dimension 3. Le choix d'une base dans E détermine un système de coordonnées homogènes sur $P(E)$. Le fait de changer de base dans E induit naturellement un changement de coordonnées sur E et donc sur $P(E)$ du type

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{10.1}$$

où (c_{ij}) est une matrice inversible. Ainsi tout changement de coordonnées homogènes sur $P(E)$ est donné par une formule du type (10.1).

Soit $P(E)$ un plan projectif complexe. Soit (x, y, z) un système de coordonnées linéaires sur E (c'est à dire une base). On munit $P(E)$ du système de coordonnées homogènes $(x\colon y\colon z)$ associé à (x, y, z). Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ un polynome homogène de degré 2. Le sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $P(E)$ défini par

$$\mathcal{C} = \{M(x\colon y\colon z) \in P(E); P(x, y, z) = 0\}$$

est par définition une courbe algébrique de degré deux. On dit que c'est la courbe d'équation

$$P(x, y, z) = 0$$

Tout polynome $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ homogène de degré 2 est par définition de la forme

$$P = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ$$

C'est donc une forme quadratique en (X, Y, Z). Ainsi, toute courbe projective de degré deux est un ensemble détérminé par une forme quadratique q sur $\mathbb{C}^2$ par

$$\mathcal{C} = \{M(x\colon y\colon z) \in P(E); q(x, y, z) = 0\}$$

Un simple changement de base dans E ou si l'on préfère, un changement de coordonnées homogènes sur $P(E)$, permet de réduire q, d'où le

Théorème 10.1. *Classification dans le cas projectif complexe. Dans un plan projectif complexe, pour toute courbe de degré deux, il existe un système de coordonnées homogènes pour lequel la courbe admet une équation appartenant à l'un des trois types suivants*

$$\begin{array}{ll} [1] & x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ [2] & x^2 + y^2 = 0 \\ [3] & x^2 = 0 \end{array}$$

Aucune courbe ne peut avoir deux équations de types différents et l'équation de degré deux d'une courbe dans un système de coordonnées fixé est unique, à multiplication par un scalaire près.

Démonstration. Le fait que dans un système de coordonnées la courbe possède une des trois équations citées découle du théorème 6.9. L'unicité du type s'obtient en caractérisant géométriquement chacune des courbes [1], [2] et [3]. L'unicité de l'équation découle du théorème d'unicité dans $\mathbb{C}^2$: on trouve la preuve dans [2]. □

On notera que [2] est la paire de droites projectives d'équations $x - iy = 0$ et $x + iy = 0$ et que [3] est la « double » droite projective d'équation $x = 0$.

Passons au cas réel maintenant. Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{C}$ la courbe de degré deux de $P(E)$ définie par une forme quadratique q. Nous savons d'après le théorème de réduction qu'il y a une base $(x,\, y,\, z)$ de E dans laquelle q s'écrit d'une des neufs manières ci-dessous

a) $q(a) = x^2 + y^2 + z^2$

b) $q(a) = x^2 + y^2 - z^2$

c) $q(a) = x^2 - y^2 - z^2$

d) $q(a) = -x^2 - y^2 - z^2$

e) $q(a) = x^2 + y^2$

f) $q(a) = x^2 - y^2$

g) $q(a) = -x^2 - y^2$

h) $q(a) = x^2$

i) $q(a) = -x^2$

Dans les cas (b) et (c) une équation de $\mathcal{C}$ est $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ [1]. Dans les cas (a) et (d), une équation de $\mathcal{C}$ est $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ [2]. Dans le cas (f) une équation de $\mathcal{C}$ est $x^2 - y^2 = 0$ [3]. Dans les cas (e) et (g) une équation de $\mathcal{C}$ est $x^2 + y^2 = 0$ [4]. Dans les cas (h) et (i) une équation de $\mathcal{C}$ est $x^2 = 0$ [5].

Notons au passage que l'on obtient le même résultat si E est un espace vectoriel réel-complexe de dimension 3 et $\mathcal{C}$ une courbe réelle (les structures réelle-complexes sont décrites dans [2]). Finalement nous avons le

Théorème 10.2. *Classification dans le cas projectif réel-complexe. Dans un plan projectif réel-complexe, pour toute courbe de degré deux, il existe un système de coordonnées homogènes réel pour lequel la courbe admet une équation appartenant à l'un des cinq types suivants*

[1] $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
[2] $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
[3] $x^2 - y^2 = 0$
[4] $x^2 + y^2 = 0$
[5] $x^2 = 0$

Aucune courbe ne peut avoir deux équations de types différents et l'équation de degré deux d'une courbe dans un système de coordonnées fixé est unique, à multiplication par un scalaire près.

Démonstration. Nous avons déjà montré que la courbe possède une de ces cinq équations dans un certain système de coordonnées réel. Pour l'unicité du type il suffit de caractériser géométriquement chacune des équations [1], [2] [3], [4] et [5]. L'unicité de l'équation découle du théorème d'unicité dans $\mathbb{C}^2$. On trouve tous les détails dans [2]. □

Chapitre 11

Application aux courbes affines de degré deux

Soient $\mathcal{P}$ un plan affine réel muni d'un repère (O, e_1, e_2). On note $\vec{\mathcal{P}}$ l'espace vectoriel associé à $\mathcal{P}$ et on le munit de la base (e_1, e_2). On note $(x,\ y)$ les coordonnées dans le repère fixé. Une courbe algébrique de degré deux est une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ définie par une équation du type

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

où a, b, c, d, e, f sont des réels vérifiant $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Le membre de gauche de cette équation est un polynome en x et y de degré deux qui se décompose en

une forme quadratique :	$ax^2 + by^2 + cxy$
une forme linéaire :	$dx + ey$
une constante :	f

Ceci nous conduit à introduire une forme quadratique q et d'une forme linéaire φ définies sur $\vec{\mathcal{P}}$ dans la base (e_1, e_2) par

$$\begin{cases} q(u) = ax^2 + by^2 + cxy \\ \varphi(u) = dx + ey \end{cases}$$

Ces formes nous permettent de dire que la courbe $\mathcal{C}$ est l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P}; q(\overrightarrow{OM}) + \varphi(\overrightarrow{OM}) + f = 0\}$$

Cette définition ne dépend plus que du choix de l'origine du repère. Si nous notons Ψ la fonction

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \vec{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \overrightarrow{OM} & \longmapsto & q(\overrightarrow{OM}) + \varphi(\overrightarrow{OM}) + f \end{array}$$

nous pouvons dire que $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points du plan « annulant » Ψ :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P}; \Psi(\overrightarrow{OM}) = 0\} \tag{11.1}$$

Regardons ce qui se passe si on change de repère : soit (O', e'_1, e'_2) un autre repère. Alors

$$\begin{aligned} \Psi(\overrightarrow{OM}) &= q(\overrightarrow{OM}) + \varphi(\overrightarrow{OM}) + f \\ &= q(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}) + \varphi(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}) + f \\ &= q(\overrightarrow{OO'}) + 2q(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{O'M}) + q(\overrightarrow{O'M}) + \varphi(\overrightarrow{OO'}) + \varphi(\overrightarrow{O'M}) + f \\ &= q(\overrightarrow{O'M}) + \Big[2\,q(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{O'M}) + \varphi(\overrightarrow{O'M})\Big] + \Big[q(\overrightarrow{OO'}) + \varphi(\overrightarrow{OO'}) + f\Big] \\ &= q(\overrightarrow{O'M}) + \varphi'(\overrightarrow{O'M}) + f' \end{aligned}$$

Ainsi il est possible d'écrire 11.1 avec un autre point origine O' à condition de remplacer Ψ par la fonction Ψ'

$$\Psi' = q + \varphi' + f'$$

construite avec la même forme quadratique q, une nouvelle forme linéaire φ' égale à

$$\varphi' = \varphi + 2\,q(\overrightarrow{OO'}, \bullet)$$

et une nouvelle constante f' égale à

$$f' = q(\overrightarrow{OO'}) + \varphi(\overrightarrow{OO'}) + f = \Psi(\overrightarrow{OO'})$$

Ceci confirme ce que nous avons déjà signalé : le fait de changer de repère sans changer d'origine ne modifie ni q, ni φ, ni f.

Analytiquement ce calcul se traduit en disant que l'équation de $\mathcal{C}$ dans un autre repère (O', e_1', e_2') est

$$a' x'^2 + b' y'^2 + c' x' y' + d' x' + e' y' + f' = 0$$

avec

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a' & c'/2 \\ c'/2 & b' \end{pmatrix} &= C^t \begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix} C \\
\begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix} &= \left[2 \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \right] C \\
f' &= \left[\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + f
\end{aligned}$$

où C est la matrice de passage de la base (e_1', e_2') vers la base (e_1, e_2) et (x_0, y_0) les coordonnées de O' dans (O, e_1, e_2). Soulignons la facilité avec laquelle nous avons établi ces formules de changement de repère. On peut lire dans [2] une autre manière d'obtenir ce résultat.

Exercice 11.1. Montrer à partir des trois formules analytiques précédentes que

1. la forme q est invariante par changement de repère,
2. la forme φ et la constante f sont invariants par changement des vecteurs du repère.

Nous retiendrons, et c'est tout à fait remarquable, que la forme quadratique q est invariante par changement de repère.

Voici maintenant notre stratégie :

1. Chercher une base (e_1', e_2') faisant disparaître le terme cxy (il s'agit de réduire q).
2. Chercher une nouvelle origine O' faisant disparaître les termes dx et ex.

Dans [2] on fait l'inverse : d'abord l'origine, ensuite la base, ce qui nécessite une petite justification : le fait de changer les vecteurs du repère dans la deuxième étape ne fait pas réapparaître les termes dx et ex, puisque cette opération ne modifie pas la forme linéaire φ. Passons au point 1.

D'après la loi d'inertie de Sylvester il existe une base (e_1', e_2') dans laquelle q s'écrit d'une des quatre manières suivantes :

i. $q(a) = x^2 + y^2$
ii. $q(a) = -x^2 - y^2$
iii. $q(a) = x^2 - y^2$
iv. $q(a) = y^2$

Dans les cas (i) et (ii) un changement adéquat de repère transforme l'équation de $\mathcal{C}$ en

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

Or $x^2 + y^2 + dx + ey + f = (x + \frac{d}{2})^2 + (y + \frac{e}{2})^2 - \frac{d^2}{4} - \frac{e^2}{4} + f$. Ainsi le changement de coordonnées

$$\begin{cases} x' = x + \frac{d}{2} \\ y' = y + \frac{e}{2} \end{cases}$$

transforme l'équation de $\mathcal{C}$ en

$$(a) \quad x'^2 + y'^2 = k$$

où $k = \frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - f$.

Dans le cas (iii) un raisonnement analogue assure l'existence d'un repère dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ s'écrit

$$(b) \quad x'^2 - y'^2 = k$$

Dans le cas (iv) il existe un repère dans lequel l'équation s'écrit

$$y^2 + dx + ey + f = 0$$

or $y^2 + dx + ey + f = (y + \frac{e}{2})^2 + dx - \frac{e^2}{4} + f$. Ainsi le changement de coordonnées

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \frac{e}{2} \end{cases}$$

transforme l'équation de $\mathcal{C}$ en

$$y'^2 + dx + k = 0$$

où $k = -\frac{e^2}{4} + f$.

Notons que si $d = 0$ cette équation est

$$(c) \quad y'^2 + k = 0$$

et $\mathcal{C}$ est soit une paire de droites parallèles, soit une droite, soit l'ensemble vide, selon que k est strictement négatif, strictement positif ou nul, respectivement.

On peut améliorer les choses si d est non nul, car dans ce cas la courbe est le graphe de la fonction

$$y \longmapsto -\frac{y^2}{d} - \frac{f}{d}$$

(on a enlevé les primes pour alléger les notations). Nous avons là une parabole coupant l'axe des x en $(-\frac{f}{d}, 0)$. Il suffit de « monter » ou « descendre » l'axe des y comme il faut pour que la parabole coupe l'axe des x en $(0, 0)$. Plus précisément, en faisant le changement

$$\begin{cases} x' = x + \frac{f}{d} \\ y' = y \end{cases}$$

c'est à dire en plaçant l'origine en le point $(-\frac{f}{d}, 0)$, l'équation devient

$$(d) \quad y'^2 + dx = 0$$

Formulons rigoureusement notre problème de classification avant de conclure :

Problème 11.1. Notons $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ le compléxifié du plan $\mathcal{P}$. Si $\mathfrak{R}$ est un repère réel de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{C}$ une courbe de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ possédant une équation réelle de degré deux dans $\mathfrak{R}$ (on appelle cela une courbe réelle), notre but est de chercher un repère réel $\mathfrak{R}'$ dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ se « réduise ». On considère que deux équations réelles sont équivalentes si on passe de l'une à l'autre par un changement *réel* de coordonnées (un changement est dit réel lorsqu'il relie deux repères réels). Notre problème équivaut à classer toutes les équations réelles de degré deux modulo cette relation d'équivalence.

Le lecteur constarera que le problème est posé non pas dans le plan réel $\mathcal{P}$, mais dans son compléxifié $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$. Considérer $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ revient à considérer des points dont les coordonnées sont complexes : certains disent que nous « introduisons les coordonnées complexes ». Pour en savoir plus sur le compléxifié et la structure réelle-complexe on pourra consulter [2].

Etant donné que les seuls changements admis dans notre classification sont *réels*, nous connaissons déjà la réponse à notre problème : elle est entièrement décrite dans le cas du plan réel. Ainsi, si $\mathcal{C}$ est une courbe réelle de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, alors il existe un repère réel dans lequel l'équation de cette courbe appartient à l'un des quatre types ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} (a) & x^2+y^2=k \\ (b) & x^2-y^2=k \\ (c) & y^2=k \\ (d) & y^2+dx=0 \end{array}$$

Mais alors pourquoi introduire les coordonnées complexes ? Pour obtenir un résultat supplémentaire : l'unicité du type de l'équation. C'est une manière efficace d'harmoniser les liens entre l'algèbre et la géométrie de $\mathcal{C}$. Nous reviendrons sur ce point plus tard.

Théorème 11.1. *Classification dans le cas réel-complexe. Dans le plan affine réel-complexe pour toute courbe algébrique de degré deux il existe un repère réel dans lequel la courbe admet l'une des neufs équations ci-dessous :*

$$\begin{array}{ll} [1] & x^2+y^2=1 \\ [2] & x^2+y^2=-1 \\ [3] & x^2+y^2=0 \\ [4] & x^2-y^2=1 \\ [5] & x^2-y^2=0 \\ [6] & y^2=2x \\ [7] & y^2=1 \\ [8] & y^2=-1 \\ [9] & y^2=0 \end{array}$$

Aucune courbe ne peut avoir deux équations de types différents et l'équation de degré deux d'une courbe dans un repère fixé est unique, à multiplication par un scalaire près.

Démonstration.

1. Réduction. Nous avons vu qu'il existe un repère réel dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ est du type (a), (b), (c) ou (d). Si c'est le type (a) avec $k>0$, un changement réel de coordonnées adéquat donne l'équation [1], si $k<0$, on arrive à [2], et si $k=0$, on a [3]. Si c'est le type (b) avec k non nul, on peut grâce un changement réel arriver à [4], et si $k=0$ on a [5]. Si c'est le type (c), un changement réel adéquat aboutit à [7], [8] ou [9], selon que k est strictement positif, strictement négatif ou nul, respectivement. Si c'est le type (c), un changement aboutit à [6].
2. Pour l'unicité du type on donne une caractérisation géométrique de chaque cas.
   - La partie réelle de [1] est une ellipse affine.
   - [2] n'est pas une paire de droites et sa partie réelle est vide.
   - [3] est une paire de droites non réelles, sécantes et conjuguées. La partie réelle est le point $(0,0)$.
   - La partie réelle de [4] est une hyperbole affine.
   - [5] est une paire de droites réelles sécantes.
   - La partie réelle de [6] est une parabole affine.
   - [7] est une paire de droites réelles strictement parallèles.
   - [8] est une paire de droites non réelles, conjuguées et strictement parallèles.
   - [9] est une droite réelle.
3. Pour l'unicité de l'équation on consultera [2]. □

Remarque 11.2. La version réelle de ce théorème est légèrement différente : on trouve les mêmes neufs types d'équations mais on n'a pas l'unicité du type à cause des équations [2] et [8] : la courbe vide admet en effet les deux équations $x^2+y^2=-1$ et $y^2=-1$. Le lecteur comprend maintenant l'intérêt de la complexification : les courbes d'équation [2] et [8] sont bien différentes dans $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$! La partie réelle n'est que la partie émergée de l'iceberg...

Exemple 11.3. Dans un cas concret comme

$$x^2+5y^2-6xy+x-\frac{21}{16}=0$$

on réduit l'équation à la manière de Gauss, en traitant la partie quadratique en premier et en éliminant les x et les y à la fin :

$$x^2+5y^2-6xy+x-\frac{21}{16} = (x-3y)^2-4y^2+x-\frac{21}{16}$$

ce qui nous pousse au changement

$$\begin{cases} x'=x-3y \\ y'=2y \end{cases}$$

qui a pour effet de changer l'équation en

$$x^2-y^2+x+\frac{3}{2}y-\frac{21}{16}=0$$

c'est à dire

$$(x+\frac{1}{2})^2-(y-\frac{3}{4})^2-1=0$$

Après le changement

$$\begin{cases} x'=x+\frac{1}{2} \\ y'=y-\frac{3}{4} \end{cases}$$

l'équation devient

$$x^2-y^2-1=0$$

ce qui montre que la courbe est une hyperbole. Notons (O', e_1', e_2') le repère où l'équation est réduite, et (O, e_1, e_2) le repère initial, on a

$$\begin{cases} x'=x-3y+\frac{1}{2} \\ y'=2y-\frac{3}{4} \end{cases}$$

donc

$$\underset{(e_1',e_2')}{\text{mat}}(e_1,e_2)=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et en inversant cette matrice nous avons

$$\begin{cases} e_1'=e_1+\frac{3}{2}e_2 \\ e_2'=\frac{1}{2}e_2 \end{cases}$$

Nous savons que les coordonnées (x, y) sont liés aux coordonnées (x', y') par la relation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'-x_O' \\ y'-y_O' \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{cases} x_O'=\frac{1}{2} \\ y_O'=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

On en déduit que $\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)$ sont les coordonnées de O' dans le repère initial.

Exercice 11.2. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Si $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$ sont deux repères orthonormés, on dit que l'on passe des coordonnées dans $\mathfrak{R}$ aux coordonnées dans $\mathfrak{R}'$ par un changement rectangulaire. On dit que deux équations de degré deux en (x, y) sont équivalentes si l'on passe de l'une à l'autre par un changement rectagulaire. Etudier les classes d'équivalences de cette relation (autrement dit : classer les courbes de degré deux par rapport aux repères orthonormés). Le but est de trouver ce qu'on appelle l'équation réduite des coniques.

Chapitre 12

Application aux quadriques réelles

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension trois muni d'un repère (O, e_1, e_2, e_3). On munit $\vec{\mathcal{E}}$ de la base (e_1, e_2, e_3) et on note (x, y, z) les coordonnées dans le repère fixé. Une quadrique est une surface algébrique de degré deux, c'est à dire une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}$ définie par une équation du type

$$P(x, y, z) = 0$$

où $P \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ est un polynome de degré deux. Comme avec les courbes de degré deux on définit

$$\Psi \ : \ \begin{array}{rcl} \vec{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{OM}(x, y, z) & \longmapsto & P(x, y, z) \end{array}$$

Cette application se décompose en une forme quadratique, une forme linéaire et une constante :

$$\Psi(\overrightarrow{OM}) = q(\overrightarrow{OM}) + \varphi(\overrightarrow{OM}) + k$$

et on peut voir $\mathcal{S}$ comme l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{E}\,; \Psi(\overrightarrow{OM}) = 0\} = \{M \in \mathcal{E}\,; q(\overrightarrow{OM}) + \varphi(\overrightarrow{OM}) + k = 0\}$$

On montre comme dans le cas du plan affine que si $O' \in \mathcal{E}$,

$$\Psi(\overrightarrow{OM}) = \Psi'(\overrightarrow{O'M}) = q'(\overrightarrow{O'M}) + \varphi'(\overrightarrow{O'M}) + k'$$

avec

$$\begin{cases} q' = q \\ \varphi' = \varphi + 2\,q(\overrightarrow{OO'}, \bullet) \\ k' = q(\overrightarrow{\mathrm{OO'}}) + \varphi(\overrightarrow{OO'}) + k \end{cases}$$

La loi d'inertie de Sylvester assurent l'existence d'une base $(e_1',\ e_2',\ e_3')$ dans laquelle q s'écrit d'une des neufs manières ci-dessous :

i. $q(u) = x^2 + y^2 + z^2$

ii. $q(u) = x^2 + y^2 - z^2$

iii. $q(u) = x^2 - y^2 - z^2$

iv. $q(u) = -x^2 - y^2 - z^2$

v. $q(u) = x^2 + y^2$

vi. $q(u) = x^2 - y^2$

vii. $q(u) = -x^2 - y^2$

viii. $q(u) = x^2$

ix. $q(u) = -x^2$

Notre stratégie sera la même qu'à la section précèdente :

1. Eliminer les monomes xy, yz et xz. Il suffit pour cela de prendre une base où q est réduite.

2. Eliminer les monomes x, y et z. Il suffit pour cela de choisir convenablement l'origine du repère, c'est à dire d'utiliser des égalités du type

$$x^2 + ax = (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$$

Dans les cas (i) et (iv) il existe un repère dans lequel l'équation de $\mathcal{S}$ est

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz = k$$

c'est à dire

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 + (z + \frac{c}{2})^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{4} = k$$

Un changement de coordonnées transforme cette équation en

$$x^2 + y^2 + z^2 = k$$

(nous devrions écrire x', y', z' et k' mais dela alourdit les notations). Si $k < 0$, $\mathcal{S}$ est vide, si $k = 0$, $\mathcal{S}$ se réduit au point origine et si $k > 0$, $\mathcal{S}$ est appelée ellipsoïde (c'est clairement homéomorphe à une sphère).

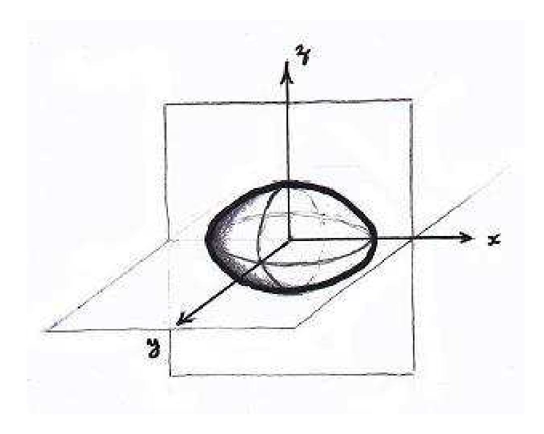


Figure 12.1. Ellipsoïde. Equation $x^2 + y^2 + z^2 = k$ avec $k > 0$. La section par un plan orthogonal à l'une des trois directions x, y ou z est soit vide, soit un point, soit une ellipse.

Dans les cas (ii) et (iii) il existe un repère dans lequel l'équation de $\mathcal{S}$ est

$$x^2+y^2-z^2+ax+by+cz=k$$

qu'un changement transforme en

$$x^2+y^2-z^2=k$$

c'est à dire

$$x^2+y^2=z^2+k$$

– Cas où $k>0$. Les sections $\mathcal{S}\cap\{z=c\}$ sont des ellipses, d'ailleurs plus c est grand en valeur absolue, plus grande est l'ellipse. On en déduit que $\mathcal{S}$ est une sorte de cheminée dont l'âme est l'axe des z et le diamètre varie au fur et à mesure que z augmente. La section $\mathcal{S}\cap\{y=0\}$ est l'hyperbole d'équation $x^2-z^2=k$ et nous indique la silhouette de cette cheminée. On dit que $\mathcal{S}$ est une hyperboloïde à une nappe.

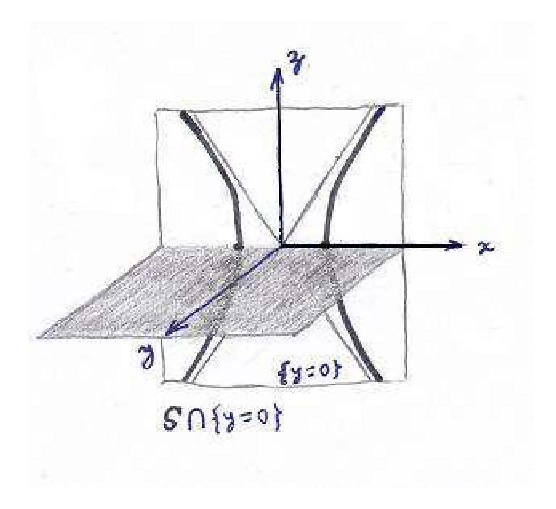


Figure 12.2. Section par le plan $\{y=0\}$: on voit la silhouette de $\mathcal{S}$.

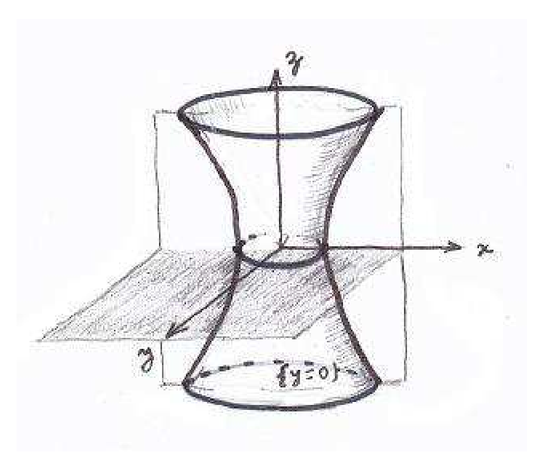


Figure 12.3. Hyperboloïde à une nappe. Equation $x^2+y^2-z^2=k$. Dans le cas où les sections horizontales sont des cercles, on reconnaît la forme d'une cheminée de centrale nucléaire.

– Cas où $k=0$. L'équation de $\mathcal{S}$ est $x^2+y^2=z^2$. Les sections $\mathcal{S}\cap\{z=c\}$ sont des ellipses d'autant plus grandes que c est grand en valeur absolue. La section $\mathcal{S}\cap\{y=0\}$ est la paire de droites $\{y=0 \text{ et } x=z\}$ et $\{y=0 \text{ et } x=-z\}$. Ainsi $\mathcal{S}$ est un cône à section elliptique.

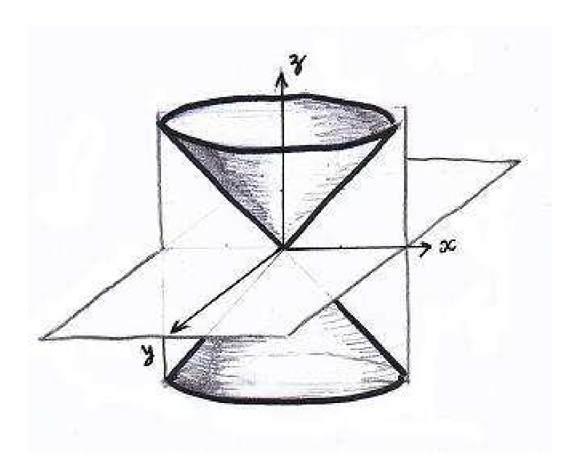


Figure 12.4. Cône à section elliptique. Equation $x^2+y^2=z^2$.

– Cas où $k<0$. Si $c \notin [-\sqrt{|k|}, \sqrt{|k|}]$, la section $\mathcal{S} \cap \{z=c\}$ est une ellipse, d'autant plus grande que c est grand en valeur absolue. Notons que l'ellipse tend vers un point au fur et à mesure que c s'approche d'une extrémité de l'intervalle cité. Si $c = \pm\sqrt{|k|}$, la section $\mathcal{S} \cap \{z=c\}$ est le point de coordonnées $(0, 0, \pm\sqrt{|k|})$. Si $c \in]-\sqrt{|k|}, \sqrt{|k|}[$, la section $\mathcal{S} \cap \{z=c\}$ est vide. On en déduit que $\mathcal{S}$ possède deux composantes connexes, chacune homéomorphe à un plan, les deux étant séparées par le plan $\{z=0\}$. La section $\mathcal{S} \cap \{y=0\}$ est l'hyperbole d'équation $x^2-z^2=k$. Ceci nous indique la silhouette des deux nappes constituant $\mathcal{S}$.

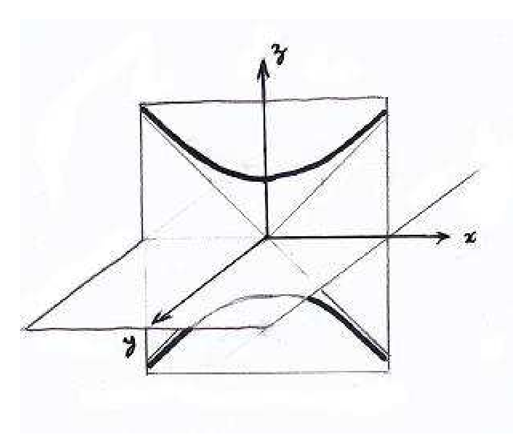


Figure 12.5. La section par le plan $\{y=0\}$ nous donne la silhouette de $\mathcal{S}$.

On dit que $\mathcal{S}$ est une hyperboloide à deux nappes.

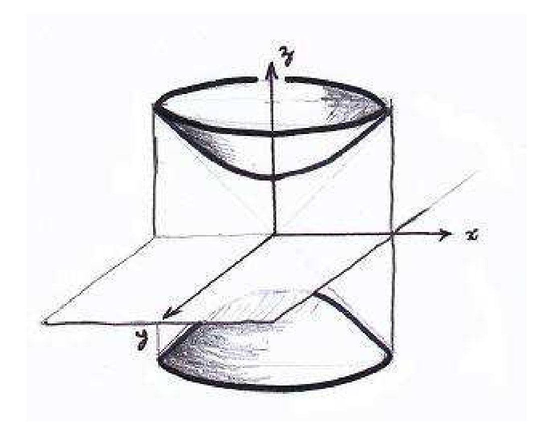


Figure 12.6. Hyperboloïde à deux nappes. Equation $x^2+y^2-z^2=k$ avec $k<0$.

Dans les cas (v) et (vii) il existe un repère dans lequel l'équation de $\mathcal{S}$ est

$$x^2+y^2+ax+by+cz=k$$

qu'un changement transforme en

$$x^2+y^2+cz=k$$

– Cas où $c=0$. Dans ce cas l'équation est $x^2+y^2=k$. Si $k<0$, $\mathcal{S}$ est vide, si $k=0$, $\mathcal{S}$ est l'axe des z et si $k>0$, $\mathcal{S}$ est un cylindre à section elliptique.

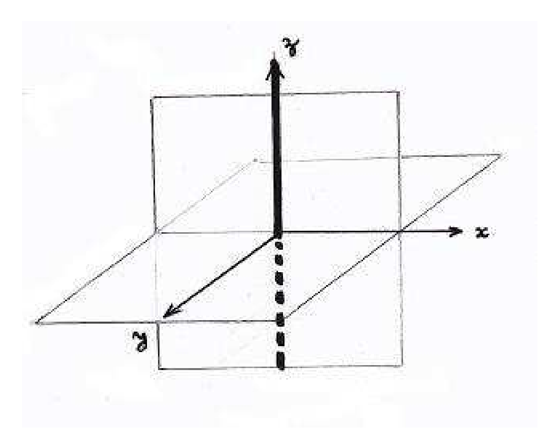


Figure 12.7. Cylindre elliptique dégénéré (c'est une droite). Equation $x^2+y^2=0$.

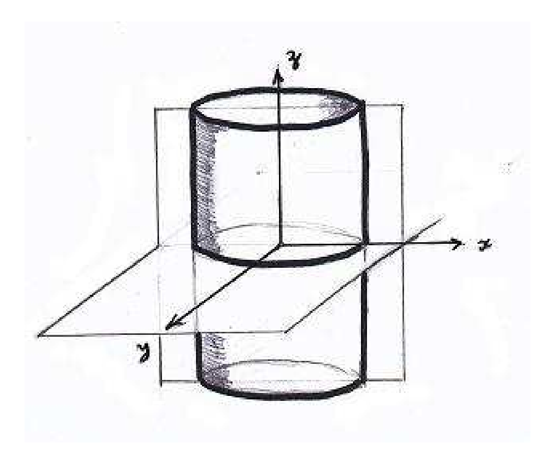


Figure 12.8. Cylindre à section elliptique. Equation $x^2+y^2=k$ avec $k>0$.

– Cas où $c\neq 0$. Dans ce cas le changement

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y \\ z'=cz-k \end{cases}$$

transforme l'équation en

$$x^2+y^2=z$$

(on devrait primer x, y et z). La section $\mathcal{S}\cap\{z=c\}$ est vide si $c<0$, réduite au point origine si $c=0$ et est une ellipse si $c>0$. Cette ellipse est d'autant plus grande que c est grand. On en déduit que $\mathcal{S}$ est une nappe située « au dessus » du plan $\{z=0\}$. La section $\mathcal{S}\cap\{y=0\}$ est la parabole d'équation $z=x^2$ et nous indique la silhouette de cette nappe. On dit que $\mathcal{S}$ est une paraboloïde elliptique.

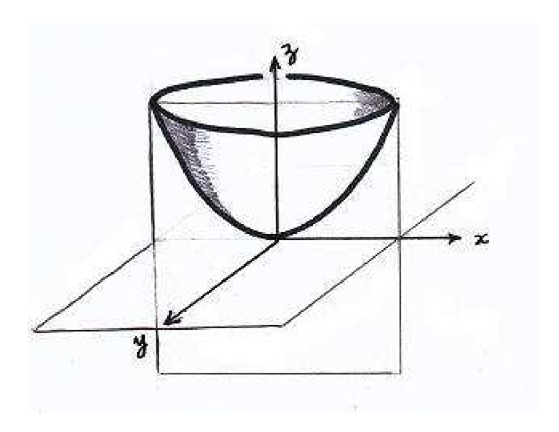


Figure 12.9. Paraboloïde elliptique. Equation $x^2 + y^2 = z$.

Dans le cas (vi) il existe un repère dans lequel l'équation de $\mathcal{S}$ est

$$x^2 - y^2 + ax + by + cz = k$$

qu'un changement transforme en

$$x^2 - y^2 + cz = k$$

– Cas où $c = 0$. Dans ce cas l'équation est $x^2 - y^2 = k$. Si $k = 0$, $\mathcal{S}$ est une paire de plans sécants : les plans $\{x = y\}$ et $\{x = -y\}$. Si $k \neq 0$, $\mathcal{S}$ est un cylindre à section hyperbolique.

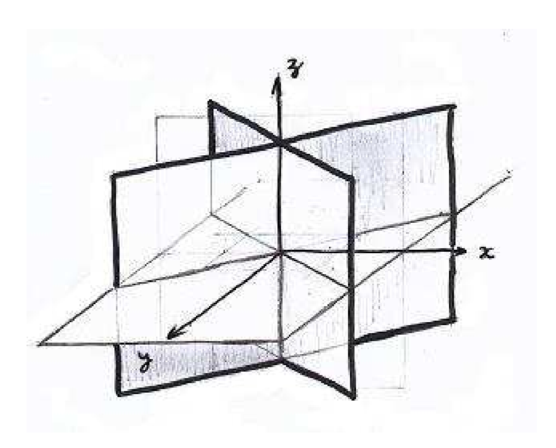


Figure 12.10. Cylindre hyperbolique dégénéré (paire de plans sécants). Equation $x^2 - y^2 = 0$.

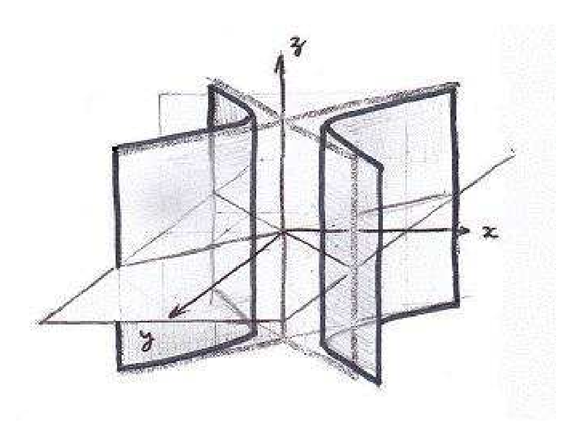


Figure 12.11. Cylindre à section hyperbolique. Equation $x^2 - y^2 = k$ avec $k \neq 0$.

– Cas où $c \neq 0$. Dans ce cas le changement

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = cz - k \end{cases}$$

transforme l'équation en

$$x^2 - y^2 = z$$

(on devrait primer x, y et z). Ainsi $\mathcal{S}$ est le graphe de la fonction

$$f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$$

La section $\mathcal{S} \cap \{z = c\}$, c'est à dire la ligne de niveau de f associée à la valeur c, est l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = c$. Il est intéressant de visualiser cette hyperbole au fur et à mesure que c augmente :

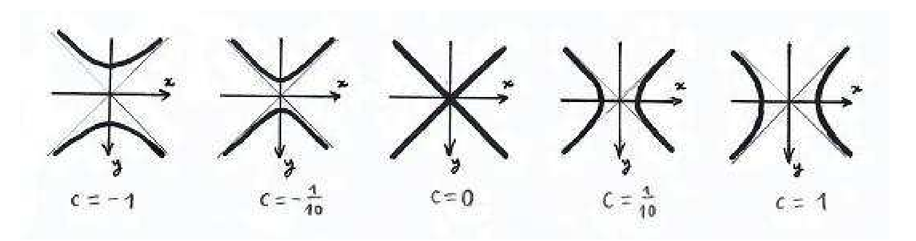


Figure 12.12. La section $\mathcal{S} \cap \{z = c\}$ pour différentes valeurs de c. Toutes ces sections sont des hyperboles ayant les mêmes asymptotes, à savoir les droites $x + y = 0$ et $x - y = 0$. Pour les c négatifs l'hyperbole est orientée dans un sens, pour les c positifs elle est orientée dans l'autre. Entre les deux, nous avons l'hyperbole dégénérée $x^2 - y^2 = 0$.

On voit que si (x, y) parcourt l'axe des x, le point du graphe correspondant décrit la parabole $z = x^2$: c'est la section $\mathcal{S} \cap \{y = 0\}$. Ainsi, la fonction partielle $f(\bullet, 0)$ possède un minimum en 0. De même, si l'on parcourt l'axe des y, le point du graphe décrit la parabole $z = -y^2$, c'est la section $\mathcal{S} \cap \{x = 0\}$, et la fonction partielle $f(0, \bullet)$ possède un maximum en 0. On retrouve d'ailleurs ces résultats en calculant les dériviées partielles de f en $(0, 0)$: elles sont nulles et pourtant $(0, 0)$ n'est pas un extrémum local de f.

Les sections $\mathcal{S} \cap \{x = c\}$ et $\mathcal{S} \cap \{y = c\}$ sont les paraboles $z = c - y^2$ et $z = x^2 - c$, respectivement. On voit très bien maintenant l'allure de $\mathcal{S}$: elle ressemble à une selle de cheval. On dit que $\mathcal{S}$ est une paraboloïde hyperbolique.

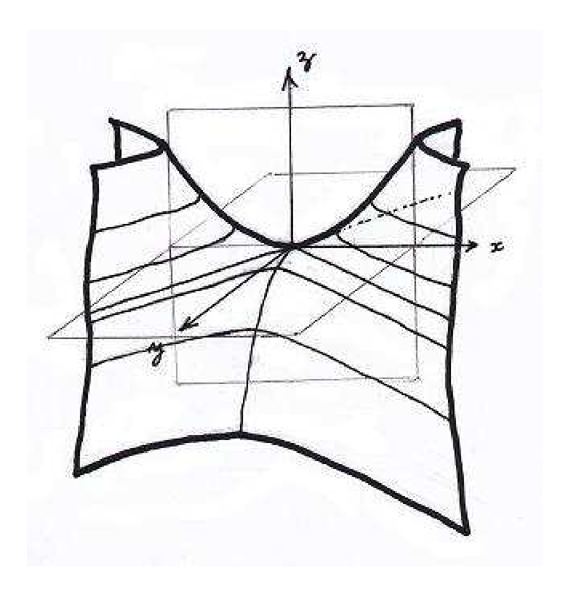


Figure 12.13. Paraboloïde hyperbolique. Equation $x^2 - y^2 = z^2$.

Dans les cas (viii) et (ix) on obtient

$$x^2+ax+by+cz=k$$

qu'un changement transforme en

$$x^2+by+cz=k$$

– Cas où $(b,c)=(0,0)$. Dans ce cas l'équation est $x^2=k$. Si $k>0$, $\mathcal{S}$ est une paire de plans parallèles. Si $k=0$, $\mathcal{S}$ est le plan (y,z). Si $k<0$, $\mathcal{S}$ est vide.

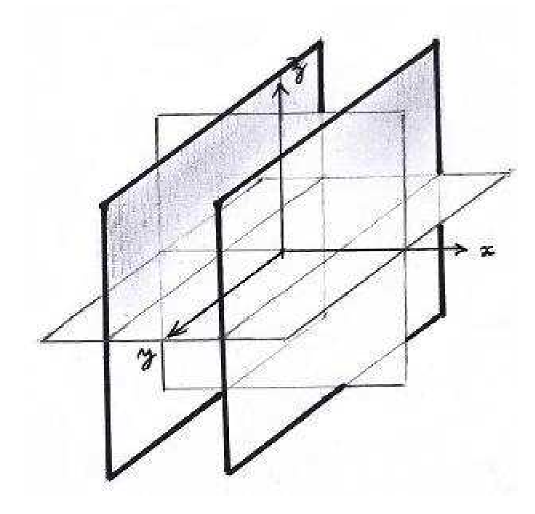


Figure 12.14. Une quadrique dégénérée. Equation : $x^2=k$ avec $k>0$.

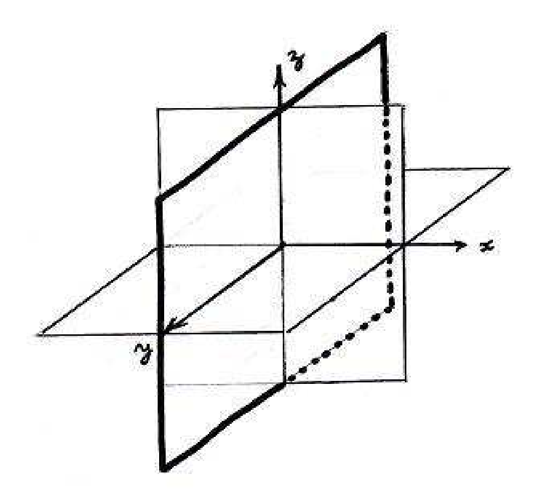


Figure 12.15. Une quadrique dégénérée. Equation : $x^2=0$.

– Cas où $(b,c)\neq(0,0)$. On fait le changement

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=by+cz \\ z'=z \end{cases}$$

L'équation devient alors

$$x^2+y=k$$

Les sections $\mathcal{S}\cap\{z=c\}$ sont toutes la parabole $y=k-x^2$. Ainsi $\mathcal{S}$ est le cylindre à section parabolique.

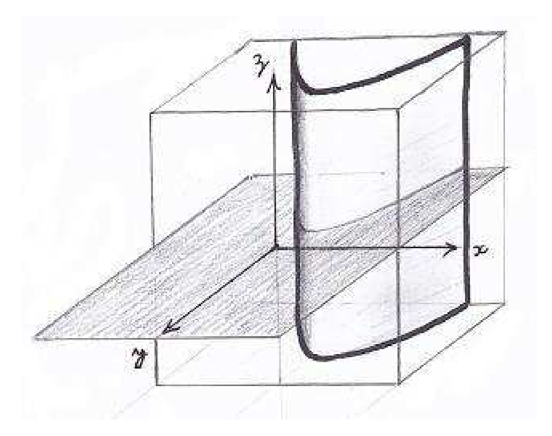


Figure 12.16. Cylindre à section parabolique. Equation : $x^2 + y = k$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème :

Théorème 12.1. *Classification des quadriques dans le cas réel-complexe. Toute quadrique réelle dans un espace affine réel-complexe tridimensionnel admet un repère réel dans lequel l'équation appartient à l'un des neufs types ci-dessous :*

$$
\begin{array}{ll}
[1] & x^2 + y^2 + z^2 = -1 \\
[2] & x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\
[3] & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\
[4] & x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\
[5] & x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\
[6] & x^2 + y^2 - z^2 = -1 \\
[7] & x^2 + y^2 = -1 \\
[8] & x^2 + y^2 = 0 \\
[9] & x^2 + y^2 = 1 \\
[10] & x^2 + y^2 = z \\
[11] & x^2 - y^2 = 0 \\
[12] & x^2 - y^2 = 1 \\
[13] & x^2 - y^2 = z \\
[14] & x^2 = 1 \\
[15] & x^2 = 0 \\
[16] & x^2 = -1 \\
[17] & x^2 + y = 1
\end{array}
$$

Aucune quadrique ne peut avoir deux équations de types différents, et l'équation de degré deux d'une quadrique dans un repère fixé est unique, à multiplication par un scalaire près.

Démonstration. Pour montrer l'existence du « bon » repère, il suffit de reprendre la discussion précédente et procéder éventuellement à des changements de coordonnées supplémentaires. Par exemple si l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = k$$

avec $k > 0$, le changement

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x}{\sqrt{k}} \\ y' = \frac{y}{\sqrt{k}} \\ z' = \frac{z}{\sqrt{k}} \end{array} \right.$$

transforme l'équation en [3].

Pour montrer l'unicité du type de l'équation, il suffit de caractériser géométriquement chacune de ces 17 équations. C'est ici que nous avons besoin des coordonnées complexes : elles nous permettent par exemple de distinguer les surfaces [1], [7] et [16].

Nous ne démontrerons pas l'unicité de l'équation dans un repère donné. □

On a clairement le

Corollaire 12.2. *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine réel tridimensionnel muni d'un repère et $\mathcal{S}$ la quadrique d'équation*

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+jz+k=0$$

On note q la forme quadratique

$$(x,y,z)\longmapsto ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz$$

Alors

1. *Si* $\mathrm{sign}(q)$ *est* $(3,0)$ *ou* $(0,3)$ *alors* $\mathcal{S}$ *est soit vide, soit un point, soit une ellipsoïde.*
2. *Si* $\mathrm{sign}(q)$ *est* $(2,1)$ *ou* $(1,2)$ *alors* $\mathcal{S}$ *est soit une hyperboloïde (à une ou deux nappes), soit un cône à section elliptique.*
3. *Si* $\mathrm{sign}(q)$ *est* $(2,0)$ *ou* $(0,2)$ *alors* $\mathcal{S}$ *est soit vide, soit une droite, soit un cylindre à section elliptique, soit une paraboloïde elliptique.*
4. *Si* $\mathrm{sign}(q)=(1,1)$ *alors* $\mathcal{S}$ *est soit une paire de plans sécants, soit un cylindre à section hyperbolique, soit une paraboloïde hyperbolique.*
5. *Si* $\mathrm{sign}(q)$ *est* $(1,0)$ *ou* $(0,1)$ *alors* $\mathcal{S}$ *est soit vide, soit un plan, soit une paire de plans parallèles, soit un cylindre à section parabolique.*

Il est intéressant de noter que dans le cas où $\mathcal{S}$ est un point, une perturbation arbitrairement petite de l'équation transforme cette dernière en une surface vide ou une ellipsoïde. A l'inverse, une petite perturbation de ces deux dernières ne change rien (comme si on était dans une position d'équilibre stable). On dit alors que ces deux quadriques (la surface vide et l'ellipsoïde du cas 1) sont génériques. Pour bien comprendre ce qu'on entend ici par « perturbation », on identifie l'équation de $\mathcal{S}$ à l'élément (a,b,c,d,e,f,g,h,j,k) de $\mathbb{R}^{10}$ formé par ses coefficients. Perturber l'équation signifie regarder un voisinage arbitrairement petit de (a,b,c,d,e,f,g,h,j,k) et observer les quadriques qui correspondent aux points contenus dans ce voisinage. On voit ainsi qu'une perturbation arbitrairement petite de l'équation du cône elliptique transforme celui-ci en une hyperboloïde à une ou deux nappes, selon la nature de la perturbation (c'est à dire selon la direction où l'on se déplace dans $\mathbb{R}^{10}$). L'hyperboloïde est donc une quadrique générique. On invite le lecteur à chercher les formes génériques pour chacun des cas donnés par le corollaire.

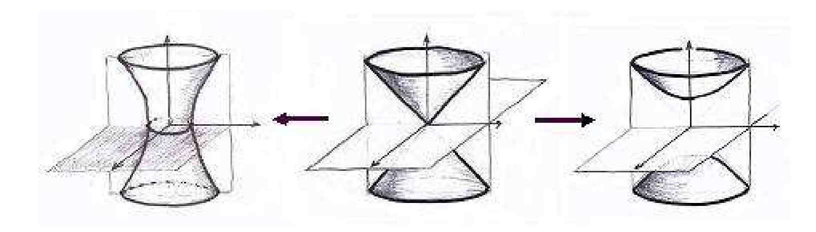


Figure 12.17. Le cône elliptique n'est pas générique : une perturbation arbitrairement petite le transforme en une hyperboloïde. Nous illustrons ici les deux manières de perturber légèrement un cône ellitique.

Chapitre 13
Lemme de Morse

Le lemme de Morse affirme que si une fonction $f\colon U \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est assez régulière (du point de vue différentiel), possède une différentielle Df nulle en 0, et une différentielle $D^2 f$ d'ordre deux non dégénérée en 0, alors modulo un changement $\mathcal{C}^1$ de coordonnées au voisinage de zéro, cette fonction est de la forme

$$x \longmapsto f(0) + x_1^2 + \ldots x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2$$

où $(p, n-p)$ est la signature de $D^2 f(0)$. Autrement dit f prend la forme de sa hessienne dans un certain système de coordonnées défini au voisinage de zéro.

Pour démontrer ce résultat nous commencerons par exprimer $f(x)$ à l'aide d'une forme quadratique. Ceci est possible grâce à la formule de Taylor. Cette formule fait apparaître $D^2 f(x)$ qui est, ne l'oublions pas, une forme quadratique. Nous obtiendrons une expression du type

$$f(x) = f(0) + X^t Q_x X$$

où X désigne la colonne des composantes de x :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et Q_x une matrice symétrique dépendant de x, de même signature que $D^2 f(0)$, à savoir $(p, n-p)$.

Cette dépendance à x empêche $X^t Q_x X$ d'être un polynôme en x_1, ..., x_n et on est encore loin de l'expression

$$x_1^2 + \ldots x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2$$

C'est ici qu'intervient le lemme 13.1. Nous comptons en effet sur le fait que pour de petites variations de x autour de 0, Q_x demeure assez proche de Q_0 pour avoir la même signature. Cela semble assez raisonnable. L'objet du lemme est de montrer que si Q est symétrique et assez proche de Q_0, alors il existe P_Q inversible telle que $Q = P_Q^t Q_0 P_Q$, et la variation de P_Q en fonction de Q soit de classe $\mathcal{C}^1$. La classification des formes quadratiques assure par ailleurs l'existence d'une matrice P inversible telle que $D = P^t Q_0 P$ soit une diagonale faite de p coefficients 1 et $n-p$ coefficients -1. On aura alors

$$\begin{aligned} X^t Q_x X &= X^t P_{Q_x}^t Q_0 P_{Q_x} X \\ &= X^t P_{Q_x}^t (P^t)^{-1} P^t Q_0 P P^{-1} P_{Q_x} X \\ &= (P^{-1} P_{Q_x} X)^t D (P^{-1} P_{Q_x} X) \\ &= U^t D U \\ &= u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2 \end{aligned}$$

où

$$U = P^{-1} P_{Q_x} X = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

et nous verrons que $X \mapsto P^{-1} P_{Q_x} X$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de 0 ce qui permettra de conclure.

On rappelle que $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices $n \times n$ symétriques à coefficients réels. Commençons par le lemme :

Lemme 13.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible. Alors il existe un voisinage V de A dans $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ et une application $V \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $Q \mapsto P_Q$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que pour tout $Q \in V$, $Q = P_Q^t A P_Q$.*

Autrement dit : toute matrice symétrique assez proche de A est congrue à A et cette congruence est « de classe $\mathcal{C}^1$ ».

On rappelle que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme (n'importe laquelle, elles sont toutes équivalentes). Ainsi $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ est un sous-espace normé de ce dernier et nous pouvons parler de voisinages dans $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$. L'application $Q \mapsto P_Q$ dont il est question ici peut être vue comme une application définie sur un ouvert V de l'espace normé $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ à valeurs dans l'espace normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui donne un sens à « classe $\mathcal{C}^1$ ».

Démonstration. On souhaite pouvoir écrire chaque matrice Q assez proche de A comme l'image par

$$\begin{array}{rrcl} g \ : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & M^t A M \end{array}$$

d'une matrice P_Q :

$$Q = g(P_Q)$$

Si au lieu de noter P_Q, on note $h(Q)$, cette égalité s'écrit

$$Q = g(h(Q))$$

et trouver h revient à inverser l'application g, au moins dans un voisinage de I. En effet $g(I) = A$, il faudrait donc rendre g bijective d'un voisinage U de I, sur un voisinage V de A.

L'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) car c'est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (M, N) & \longmapsto & M^t A N \end{array}$$

Calculons la différentielle de g en I pour pouvoir appliquer le théorème d'inversion locale : dire que la différentielle de g en I est l'application linéaire $L: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ signifie que

$$g(I + H) = g(I) + L(H) + o(H)$$

or nous avons :

$$\begin{array}{rcl} g(I + H) - g(I) & = & (I + H)^t A (I + H) - A \\ & = & (I + H^t) A (I + H) - A \\ & = & A + AH + H^t A + H^t A H - A \\ & = & (H^t A + AH) + H^t A H \end{array}$$

où

$$H \longmapsto H^t A + AH$$

est linéaire et

$$H^t A H = o(H)$$

donc

$$Dg(I): H \longmapsto H^t A + AH$$

Examinons l'injectivité de $Dg(I)$. Dire que $Dg(I)(H) = 0$ revient à dire que $(AH)^t = -AH$, ainsi, le noyau de $Dg(I)$ est le sous-espace

$$\ker Dg(I) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; AM \text{ est antisymétrique}\}$$

Ce sous-espace possède la même dimension que le sous-espace $\mathcal{M}_n^{\mathrm{alt}}(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques et donc n'est pas trivial. Par conséquent $Dg(I)$ n'est pas inversible et nous ne pouvons pas appliquer le théorème d'inversion locale. Qu'à cela ne tienne, Posons

$$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; AM \in \mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})\}$$

On montre facilement que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant la même dimension que $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$. Nous l'avons choisi parce qu'il est en somme directe avec le noyau de $Dg(I)$. Considérons la restriction de g au sous-espace $\mathcal{F}$ et sa co-restriction à $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ (pour simplifier nous noterons g cette restriction-corestriction) :

$$\begin{array}{rrcl} g \ : & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & M^t A M \end{array}$$

On montre comme précèdemment que g est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\begin{array}{rrcl} Dg(I) \ : & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}) \\ & H & \longmapsto & H^t A + AH \end{array}$$

et ce coups-ci, nous allons voir que $Dg(I)$ est un isomorphisme. En effet, la source et le but ayant la même dimension, il suffit d'établir l'injectivité pour en avoir la preuve, et clairement

$$\ker Dg(I) = \{M \in \mathcal{F} ; AM \text{ est antisymétrique}\} = \{0\}$$

Ainsi, d'après le théorème d'inversion locale il existe un voisinage ouvert U de I dans $\mathcal{F}$ tel que $g_{|U}$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $g(U)$. On peut même supposer que U est contenu dans $\mathcal{F} \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, puisque $GL(n, \mathbb{R})$ est un voisinage de I dans $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$. Notons $V = g(U)$. C'est un voisinage de A dans $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ puisque $g(I) = A$. Soit $Q \in V$ et notons $\gamma = g_{|U}$. Alors $Q = \gamma(\gamma^{-1}(Q)) = \gamma^{-1}(Q)^t A \gamma^{-1}(Q)$ et l'application

$$\begin{array}{rrcl} \gamma^{-1} \ : & V & \longrightarrow & U \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \\ & Q & \longmapsto & P_Q \end{array}$$

répond parfaitement au problème posé. □

Théorème 13.2. *(Lemme de Morse) Soient U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $Df(0) = 0$ et la forme quadratique $D^2 f(0)$ soit non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors il existe des voisinages ouverts V et W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : V \to W$ tels que $V \subset U$, $\varphi(0) = 0$ et pour tout $x \in V$,*

$$f(x) = f(0) + u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2$$

où $(u_1, \ldots, u_n) = \varphi(x)$.

Pour bien comprendre ce théorème il faut bien connaître la notion de système local de coordonnées. Un système de coordonnées $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

$$\begin{array}{rrcl} \varphi \ : & V & \longrightarrow & W \subset \mathbb{R}^n \\ & p & \longmapsto & \varphi(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p)) \end{array}$$

où V est un voisinage ouvert de 0 et W un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si p est un point de V, on dit que le n-uplet $(x_1(p), \ldots, x_n(p))$ sont les coordonnées de p pour le système φ. On aurait pu simplement dire que $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées au voisinage de 0. Les physiciens et les géomètres notent abusivement $(x_1, \ldots, x_p)$ les coordonnées de p.

Exemple 13.3. On pose $U = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, 0, z) ; x \geqslant 0, z \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rrcl} \psi \ : & V & \longrightarrow & U \\ & (r, \theta, z) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \end{array}$$

Cette application est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme et son inverse

$$(x, y, z) \longmapsto (r, \theta, z)$$

est le système des coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$ (ou plutôt sur une partie de $\mathbb{R}^3$).

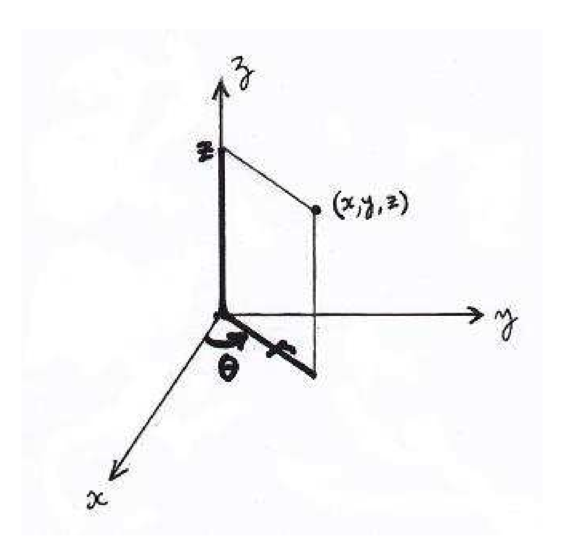


Figure 13.1. (r,θ,z) sont les coordonnées cylindriques du point (x,y,z).

Le lemme de Morse affime que sous certaines hypothèses, il existe un système coordonnées $(u_1, ..., u_n)$ au voisinage de 0 dans lequel 0 a pour coordonnées 0, et f s'écrit

$$f:(u_1,...,u_n)\longmapsto f(0)+u_1^2+...+u_p^2-u_{p+1}^2-...-u_n^2$$

notation abusive (mais si claire) exprimant qu'au point de coordonnées (u_1, ..., u_n), f associe $f(0)+u_1^2+...+u_p^2-u_{p+1}^2-...-u_n^2$.

Démonstration. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 s'écrit ici

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+Df(0)(x)+\int_0^1 (1-t)\,D^2f(tx)(x)\,dt \\ &= f(0)+\int_0^1 (1-t)\,D^2f(tx)(x)\,dt \end{aligned}$$

Il se trouve que pour tout $x\in U$,

$$q_x: h\longmapsto \int_0^1 (1-t)\,D^2f(tx)(h)\,dt$$

est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ (qui dépend de la valeur de x). Notons Q_x la matrice de cette forme dans la base canonique de sorte que pour tout x l'on ait

$$f(x)=f(0)+X^t\,Q_x\,X$$

où X désigne la colonne des composantes de x. On remarquera que

$$q_0=\frac{1}{2}D^2f(0)$$

et donc

$$\mathrm{sign}(Q_0)=(p,n-p)$$

Cette matrice étant symétrique et inversible, nous savons d'après le lemme qui précède qu'il existe un voisinage V de Q_0 dans $\mathcal{M}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ et une application

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \\ Q &\longmapsto P_Q \end{aligned}$$

de classe $\mathcal{C}^1$ tels que pour tout $Q\in V$,

$$Q=P_Q^t\,Q_0\,P_Q$$

L'application $x \mapsto Q(x)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, il existe un voisinage V' de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $Q(V') \subset V$. Ainsi pour tout $x \in V'$,

$$Q_x = P_{Q_x}^t Q_0 P_{Q_x}$$

Par ailleurs nous savons grâce au théorème de réduction qu'il existe $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ telle que

$$D = P^t Q_0 P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

avec p fois le coefficient 1, puisque $\mathrm{sign}(Q_0) = (p, n-p)$. Ainsi si $x \in V'$,

$$\begin{aligned} X^t Q_x X &= X^t P_{Q_x}^t Q_0 P_{Q_x} X \\ &= X^t P_{Q_x}^t (P^t)^{-1} P^t Q_0 P P^{-1} P_{Q_x} X \\ &= (P^{-1} P_{Q_x} X)^t D (P^{-1} P_{Q_x} X) \\ &= U^t D U \\ &= u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2 \end{aligned}$$

où

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = P^{-1} P_{Q_x} X$$

Il s'agit donc maintenant de montrer que

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ V' &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto P^{-1} P_{Q_x} X \end{aligned}$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de 0 qui associe 0 à 0. Le fait que $\varphi(0) = 0$ est évident. Le fait que φ soit de classe $\mathcal{C}^1$ provient de la classe de $x \mapsto P_{Q_x}$. Essayons d'appliquer le théorème d'inversion locale au voisinage de 0. Pour cela il faut s'assurer que $D\varphi(0)$ est inversible. Il se trouve que $D\varphi(0) = P^{-1} P_{Q_0}$. En effet

$$\varphi(h) - \varphi(0) - P^{-1} P_{Q_0} h = P^{-1} P_{Q_h} H - P^{-1} P_{Q_0} H = P^{-1} (P_{Q_h} - P_{Q_0}) H = o(h)$$

Ainsi $D\varphi(0)$ est inversible est donc φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de 0. □

Exercice 13.1. Montrer que

a) Au voisinage de zéro, $H^t A H = o(H)$ où H et A sont des matrices réelles carrées d'ordre n.

b) Au voisinage de zéro, $P^{-1} (P_{Q_h} - P_{Q_0}) H = o(h)$ où $h \mapsto Q_h$ et $Q \mapsto P_Q$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et H désigne la colonne des composantes de h.

Bibliographie